

PROYECTO DOCENTE E INVESTIGADOR

Pau Amaro Seoane



Universidad de La Laguna
Departamento de Astrofísica

Concurso para la provisión de la plaza DF1587
de Profesor Titular de Universidad
en el Área de Conocimiento: Astronomía y Astrofísica

BOE núm. 288, Sec. II.B. Pág. 148893,
publicado el dos de diciembre del dos mil ventiuno

ÍNDICE GENERAL

Introducción	6
I <u>PROYECTO DOCENTE</u>	8
<i>Bloque 1. Contextualización</i>	9
1 Espacio europeo de educación superior	10
1.1 Introducción	10
1.2 La universidad en el contexto europeo	10
1.3 El sistema universitario español	12
1.4 Funciones de la universidad	13
1.5 Conclusión sobre los diferentes contextos	14
2 La universidad española y su legislación	16
2.1 Estructura de la universidad	16
Departamentos universitarios	17
Estructuras propias de investigación	17
El Profesorado Universitario	19
El alumnado universitario	22
Gobierno y representación de las Universidades	23
Calidad universitaria y sistemas de evaluación	25

2.2	Legislación y contexto educativo español	26
3	El proceso de enseñanza-aprendizaje	32
3.1	Planificación	32
3.2	Objetivos del aprendizaje	34
3.3	Métodos de enseñanza	37
3.4	Actores del proceso de enseñanza-aprendizaje	43
	El alumnado	44
	El profesorado universitario	45
3.5	Evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje	47
	Evaluación del alumnado	47
	Evaluación del profesorado	51
3.6	La innovación educativa como proceso de mejora	52
3.7	Evaluación del alumnado de máster	52
3.8	Un ejemplo de evaluación	54
	Bloque 2. Programa Docente de la asignatura	57
4	Elementos básicos de la asignatura	58
4.1	Competencias	58
4.2	Contenidos	60
4.3	Metodología	61
4.4	Evaluación	68
5	Estructura de la asignatura	70
6	Temario detallado	72
6.1	Física de objetos compactos y procesos de acreción	72
6.2	Tema I: Agujeros negros	74
	Motivación astrofísica	74
	Introducción matemática	76
	Agujeros negros de Schwarzschild	79
	Agujeros negros con carga y en rotación	83
	Vectores y horizontes de Killing	88
	Termodinámica de agujeros negros	103
	Radiación de Hawking	105
	Derivación esquemática de la radiación de Hawking	111
	Ejercicios de relatividad y agujeros negros	118
6.3	Tema II: Estrellas de neutrones	130
	Conceptos principales	131
	Formación	133

Masa y temperatura	134
Densidad y presión	135
Estructura	136
Campo magnético: Estrellas de neutrones y magnetares	137
Gravedad y ecuación de estado	139
Púlsares	141
Pérdida de giro	142
Incremento de giro	144
Ejercicios de estrellas de neutrones	144
6.4 Tema III: Enanas blancas	145
Conceptos generales	145
El límite de Chandrasekhar	148
La relación entre la masa y el volumen	149
Relación entre el radio y la masa	151
Pérdida de calor: edad de una enana blanca	152
Ejercicios de enanas blancas	154
6.5 Tema IV: Acreción	157
Estructura	157
Conceptos generales	158
El límite de Eddington	159
Acreción en sistemas binarios	161
Discos de acreción	165
Inestabilidad magnetorotacional	169
Campos magnéticos y chorros	170
Modelos analíticos de discos de acreción	171
Chorros relativistas	173
Ejercicios de acreción	177
6.6 Bibliografía básica	179

II PROYECTO DE INVESTIGACIÓN 181

7 Agujeros negros supermasivos y espirales de ondas gravitacionales	182
7.1 Objetos supermasivos y oscuros en núcleos galácticos	183
7.2 Sondas del horizonte de sucesos	185
8 Aberración y efecto de haz de ondas gravitacionales	189
8.1 Presentación del problema	189
8.2 Mi experiencia en el campo	190

9 Descripción física y órdenes superiores	192
9.1 Órdenes superiores: Armónicos esféricos de espín 2	194
10 Influencia en las detecciones e interpretaciones	201
10.1 Medida de estos efectos con los detectores actuales	201
10.2 Las velocidades peculiares son lo suficientemente altas como para que es- tos efectos sean cruciales	202
10.3 Impacto en la detección y extracción de parámetros	203
10.4 Fuentes afectadas	207
10.5 Implicaciones	208
10.6 Diferentes tipos de fuentes	208
10.7 Efectos relativistas generales	209
10.8 Modelización de nuestra teoría y comprobación con datos	211
10.9 Tomografía de cúmulos de galaxias y materia oscura	213
11 Referencias bibliográficas	215

INTRODUCCIÓN

Un proyecto docente es un trabajo reflexivo clave en la práctica educativa del profesor. Consiste en estructurar y planificar una asignatura, marcando los objetivos formativos, detallando los contenidos y explorando las estrategias idóneas, para lograr que los alumnos alcancen aquellos con éxito. Todo ello, a través de actividades atractivas y al tiempo lo más formativas posible. Para llevarlo a cabo, es muy importante adecuar los objetivos propuestos al contexto donde se impartirá la docencia, teniendo en cuenta tanto las atribuciones profesionales de los futuros egresados como la normativa y filosofía de las instituciones en la que se imparte, garantizando así la calidad y sostenibilidad de la oferta formativa diseñada.

El desarrollo de esta memoria constituye el presentado en el concurso para la provisión de la plaza DF1587 del cuerpo de profesorado titular en la Universidad de La Laguna del área de conocimiento de Astronomía y Astrofísica, según la publicación en el BOE del dos de diciembre de 2021. En virtud de lo anterior, para poder concursar y en cumplimiento con la legislación vigente, presento en esta memoria el proyecto docente correspondiente a la asignatura "Física de Objetos Compactos y Procesos de Acreción". Este proyecto se ha escrito considerando la experiencia docente del candidato como profesor en distintas áreas de la astrofísica que, por su amplia variedad, son objeto del perfil docente de la plaza. En la impartición de asignaturas de astrofísica, física y matemáticas, el aspirante cuenta con una experiencia docente de más de quince años y acumula más de mil novecientas horas de enseñanza.

La elaboración no solo constituye un formalismo, sino que permite al docente realizar

un proceso de reflexión sobre la función de la universidad y el papel del profesor universitario en nuestro tiempo, por un lado, y enfrentarse al reto que implica programar y prever la creación y definición de una asignatura, reflexionando sobre los objetivos, procesos y resultados que han de configurar su docencia en la universidad. De la misma manera que para resolver un problema de astrofísica resulta imprescindible tener en cuenta las condiciones de contorno que lo definen, acotan y configuran, también en la elaboración de un proyecto docente existen unas condiciones ambientales que son determinantes a la hora de estructurar, definir sus objetivos, desarrollar y establecer su aplicación definitiva de forma efectiva.

Este proyecto consta de dos partes diferenciadas. La primera, llamada “Proyecto docente”, incluye a su vez dos bloques temáticos. El primero analiza a lo largo de tres capítulos el contexto social, institucional y académico donde se exponen los distintos factores que influyen en el diseño del proyecto docente propuesto. El segundo bloque se dedica principalmente al desarrollo del programa docente de la asignatura a través de dos capítulos. En este bloque se desarrollan los elementos básicos del programa que aparecen presentados de forma genérica en la guía docente de la asignatura. En concreto, las competencias, los contenidos, la metodología docente y el sistema de evaluación utilizado con el objetivo de asegurar el desarrollo de las competencias y la consecución de los resultados de aprendizaje establecidos. Este bloque también recoge el plan de trabajo de nuestra propuesta para esta asignatura, “Física de Objetos Compactos y Procesos de Acreción”, impartida en el Departamento de Astrofísica de la ULL.

La segunda parte, tal como indica su nombre, se dedica por completo al “Proyecto de investigación” en el que se expone el tema que se propone, la astrofísica que podremos hacer con la captura por ondas gravitacionales de objetos compactos de masa estelar por agujeros negros supermasivos. Este tipo de fuente de ondas gravitacionales nos permitirá hacer una cartografía del espaciotiempo cerca de uno de estos agujeros negros.

Pau Amaro Seoane

València, veintinueve de marzo de dos mil veintidós

Parte I

PROYECTO DOCENTE

Bloque 1. Contextualización

CAPÍTULO

1

ESPACIO EUROPEO DE EDUCACIÓN SUPERIOR

1.1. Introducción

Las condiciones en las que se desarrolla un proyecto docente son esenciales para el correcto desarrollo del mismo. Así, su planteamiento debe tener en cuenta tanto el contexto social como el académico para que pueda tener éxito y no se vea relegado a ser una mera reflexión quimérica. Por lo tanto, en esta sección, recapitularemos los diversos factores que pueden condicionar este Proyecto Docente, desde las directivas marcadas por la Unión Europea hasta el plan de estudios, pasando por las características más destacables que se definen en la ley de enseñanza universitaria española.

1.2. La universidad en el contexto europeo

La educación en el marco europeo es anterior a la creación de la propia Unión Europea. Así, los rectores de hasta 430 universidades europeas firmaron en septiembre de 1988 la “Magna Charta Universitatum” que sanciona los principios irrenunciables de las universidades: libertad, conocimiento, investigación y enseñanza sobre la base de la nueva movilidad

y el intercambio internacional de estudiantes, investigadores y docentes universitarios. Sin embargo, esta declaración de principios adquiere un carácter mucho más formal cuando se forma la Unión Europea en 1993. La implicación de la Unión Europea en el modelo educativo de la Universidad empieza en mayo de 1998, cuando los ministros de Educación de Francia, Italia, Reino Unido y Alemania firman la Declaración de la Sorbona, en la que se propone la necesidad de potenciar la armonización europea en la Educación Superior. Esto llevó a la creación del Espacio Europeo de Educación Superior en 1999, con la adhesión de hasta 26 países adicionales a los arriba firmantes, entre los que se encuentra España, mediante la firma de la Declaración de Bolonia. Dicha declaración desencadenó el Proceso de Bolonia, que tiene como objetivo facilitar el intercambio de titulados y adaptar el contenido de los estudios universitarios a las demandas sociales. Este proceso, pese a no ser vinculante, fue un marco de referencia para las reformas educativas que se produjeron en los países miembros a principios del siglo XXI, entre las que se encuentra la aprobación de la Ley Orgánica de Universidades (LOU) en España. La Declaración de Bolonia es un proceso continuo en constante revisión; así, se produce un seguimiento bianual, donde los países miembros hacen una evaluación de los avances realizados y marcan pautas para su mejora. La adhesión de otros países a esta declaración a lo largo de los años ha sido continua, llegando a ser cuarenta y ocho en la actualidad. En 2017, en Gotemburgo, se produjo un debate sobre educación y cultura con los dirigentes de la UE para perfilar la visión sobre la educación que persigue la Unión Europea para 2025. En ella, se definió que la educación y la cultura son esenciales para el desarrollo de una Europa más inclusiva, cohesiva y competitiva, y se acordó:

1. Introducir un sistema de educación superior de tres ciclos, consistente en estudios de grado, máster y doctorado.
2. Garantizar el reconocimiento mutuo de las calificaciones y los períodos de aprendizaje en el extranjero completados en otras universidades.
3. Aplicar un sistema de garantía de la calidad, a fin de reforzar la calidad y pertinencia del aprendizaje y la enseñanza.
4. Definir unos objetivos estratégicos, según se enumeran en la Declaración de Bolonia, centrados en:
5. Un sistema fácilmente comprensible y comparable de titulaciones.
6. El establecimiento de un sistema de estudios basado fundamentalmente en dos ciclos principales.
7. La promoción de la cooperación europea para garantizar la calidad de la Educación Superior (estableciendo criterios y metodologías comparables).

8. La promoción de la movilidad de estudiantes, profesores y personal administrativo de las universidades y otras instituciones de educación superior europeas.
9. La adopción de un sistema de créditos compatibles (Créditos ECTS).

A su vez, los ministros de educación también adoptaron el Comunicado de París, en que se definen las actividades prioritarias en este ámbito para los próximos años y que pedían, por ejemplo:

1. Un enfoque inclusivo e innovador del aprendizaje y la enseñanza.
2. Una cooperación transnacional integrada en materia de enseñanza superior, investigación e innovación.
3. La garantía de un futuro sostenible a través de la educación superior.

Hay que destacar que el Espacio Europeo de Educación Superior impulsa un modelo de enseñanza universitaria basado en un sistema enseñanza-aprendizaje más amplio que la idea tradicional de transmisión de información en sentido relación profesorado-alumnado. El nuevo papel del profesorado de universidad tiene que ser el de impulsor y guía del aprendizaje de las actitudes y competencias que necesitan adquirir los estudiantes para el desarrollo de su futura profesión. Este contexto educativo requiere de profesores que tengan actitudes participativas, abiertas, evolutivas y dinámicas para inculcarlas al alumnado.

Por otra parte, una de las principales características del nuevo modelo educativo europeo, y que la universidad debe tener en cuenta, es que los egresados deben seguir un aprendizaje a lo largo de toda su vida profesional. Este hecho obliga a las universidades a plantear metodologías activas de fomento del aprendizaje evolutivo, autoaprendizaje y conocimiento de entorno socioeconómico donde aquellos realizarán su labor profesional. Esta adaptación constituye un gran desafío para la organización universitaria en general, y en especial para el profesorado, ya que deberá adaptarse y organizar sus metodologías de enseñanza teniendo en cuenta este hecho. En este nuevo modelo, la actividad docente del profesorado universitario se mide en créditos ECTS y está formada por todas las actividades incluidas en el Plan de Ordenación Docente (POD): asignaturas, proyectos fin de carrera o trabajos final de grado y/o de máster, prácticas externas, trabajos tutelados de postgrado, así como tesis y trabajos de doctorado. En el valor de estas actividades se incluye el de las tutorías asociadas a cada una de ellas.

1.3. El sistema universitario español

En el sistema TU universitario español, las universidades se investigador constituyen como Entidades de Derecho Público que gozan de autonomía de acuerdo con el Artículo

27, número 10, de la Constitución Española, donde las competencias en materia universitaria se distribuyen entre los distintos poderes públicos (Estado, Comunidades Autónomas y las propias Universidades) en cumplimiento del título octavo de la Constitución. La implantación de la Declaración de Bolonia en el sistema universitario español se produjo mediante la aprobación el 24 de diciembre de 2001 de la Ley Orgánica de Universidades (LOU) que fue modificada el 12 de abril de 2007 por la Ley Orgánica de Modificación de la LOU (LOMLOU) que establecieron las universidades a partir de 2010.

1.4. Funciones de la universidad

Las referencias más directas sobre la función pública de la Universidad se pueden encontrar en la LOU, donde se especifican las siguientes funciones:

Artículo 1:

Uno: El servicio público de la educación superior corresponde a la Universidad, que lo realiza mediante la docencia, el estudio y la investigación.

Dos: Son funciones de la Universidad al servicio de la sociedad:

- (a) La creación, desarrollo, transmisión y crítica de la ciencia, de la técnica y de la cultura.
- (b) La preparación para el ejercicio de actividades profesionales que exijan la aplicación de conocimientos y métodos científicos o para la creación artística.
- (c) La difusión, la valorización y la transferencia del conocimiento al servicio de la cultura, de la calidad de vida y del desarrollo económico.
- (d) La difusión del conocimiento y la cultura a través de la extensión universitaria y formación a lo largo de toda la vida.

La LOU sanciona de este modo el carácter docente, investigador y de difusión del conocimiento y la cultura que debe tener la universidad en el entorno socioeconómico y que, por lo tanto, debe guiar la actividad del profesorado universitario. La LOU señala en su preámbulo las tres funciones básicas que debe cumplir la universidad: el desarrollo científico, la formación profesional y la extensión de la cultura. Asimismo, resalta su papel como servicio público que sirve a los intereses generales de la sociedad. Sus funciones se describen de una forma concreta en los títulos VI y VII que corresponden con la descripción *“De las enseñanzas y títulos”* y *“De la investigación en la Universidad”* respectivamente.

En este artículo se resalta la importancia de los conocimientos científicos, técnicos o artísticos del profesorado como fuente de conocimiento, resaltando la transmisión de estos como esencial en la universidad, la libertad de cátedra y la necesidad de evaluación para determinar la eficacia de su actividad docente.

Del título VI *“De las enseñanzas y títulos”* se puede extraer la función docente que viene recogida en el Artículo 33 *“De la función docente”* y que indica las tres líneas generales:

- (a) Las enseñanzas para el ejercicio de profesiones que requieren conocimientos científicos, técnicos o artísticos y la transmisión de la cultura son misiones esenciales de la Universidad.
- (b) La docencia es un derecho y un deber de los profesores de las universidades que ejercerán con libertad de cátedra, sin más límites que los establecidos en la Constitución y en las leyes y los derivados de la organización de las enseñanzas en sus universidades.
- (c) La actividad y la dedicación docente, así como la formación del personal docente de las universidades, serán criterios relevantes, atendida su oportuna evaluación, para determinar su eficiencia en el desarrollo de su actividad profesional.

En este artículo se enfatiza la importancia de los conocimientos científicos, técnicos o artísticos del profesorado como fuente de conocimiento, y se resaltan la transmisión de estos como esencial en la universidad, la libertad de cátedra y la necesidad de evaluación para determinar la eficacia de la actividad docente.

Del título VII *“De la investigación en la Universidad”* se puede extraer la función investigadora, esencial en el desarrollo de la universidad, que viene recogida en el Artículo 39, *“La investigación, función de la Universidad”* que contiene tres líneas generales:

1. La investigación, fundamento de la docencia, medio para el progreso de la comunidad y soporte de la transferencia social del conocimiento, constituye una función esencial de las Universidades.
2. Se reconoce y garantiza la libertad de investigación en el ámbito universitario.
3. La universidad asume, como uno de sus objetivos esenciales, el desarrollo de la investigación científica, técnica y artística, así como la formación de investigadores, y atenderá tanto a la investigación básica como a la aplicada. En este artículo se resalta la importancia de la investigación como medio para el progreso y la transferencia del conocimiento a la sociedad, se garantiza la libertad de investigación en la universidad y se atiende a la investigación, tanto en su faceta básica como aplicada, como objetivo esencial de la universidad.

1.5. Conclusión sobre los diferentes contextos

Por todo lo anteriormente expuesto, a la hora de diseñar el proyecto docente de una asignatura es de vital importancia considerar el contexto en que nos encontramos como un

elemento clave para adaptar nuestra propuesta al principal objetivo que pretendemos alcanzar: contribuir a la formación científica y profesional de nuestros alumnos en la materia. Para ello, nos resultará muy útil tener presentes los cuatro ámbitos citados a continuación:

- El contexto *institucional*, descrito por la ley orgánica de universidades actualmente vigente y adaptado al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), que establece el marco normativo del sistema universitario, así como el de las estructuras a las que pertenece el docente y el alumno.
- El contexto *académico*, detallado por el Plan de Estudios, de la titulación a la que pertenece la asignatura.
- El contexto *instruccional* que determina las metodologías y sistemas de evaluación más adecuados para el perfil de los alumnos matriculados en ella.

CAPÍTULO

2

LA UNIVERSIDAD ESPAÑOLA Y SU LEGISLACIÓN

2.1. Estructura de la universidad

La LOU introduce una reestructuración de los órganos de gobierno de la universidad y estrecha su relación con la sociedad. Así, establece que el Consejo de Coordinación Universitaria es el máximo órgano consultivo y de coordinación del sistema universitario y se configura como foro de encuentro y debate entre las tres administraciones que convergen en él: estatal, autonómica y universitaria. Por otro lado, se crea un nuevo órgano, el Consejo Social, que se configura como el órgano de relación entre la universidad y la sociedad, supervisando la actividad económica de aquella y el rendimiento de los servicios, así como la aprobación de los presupuestos. Finalmente, se erige al Consejo de Gobierno como máximo órgano de gobierno universitario presidido por el rector para establecer las líneas estratégicas y programáticas en los ámbitos de organización de las enseñanzas, investigación, recursos humanos y económicos.

Departamentos universitarios

En la anterior ley de regulación de la universidad, la Ley de Regulación Universitaria (LRU), se potenció la separación de la universidad en departamentos que aglutinaran áreas de conocimiento científico, técnico o artístico común al personal docente e investigador. La LOU mantiene esa estructura departamental como dicta su Título II *“De la estructura de las universidades”* en su Capítulo I *“De las Universidades Públicas”* donde encontramos el Artículo 9 que describe la función de los departamentos dentro de las universidades públicas:

- (a) Los Departamentos son los órganos encargados de coordinar las enseñanzas de una o varias áreas de conocimiento en uno o varios centros, de acuerdo con la programación docente de la universidad, de apoyar las actividades e iniciativas docentes e investigadoras del profesorado, y de ejercer aquellas otras funciones que sean determinadas por los Estatutos.
- (b) La creación, modificación y supresión de Departamentos corresponde a la Universidad conforme a sus Estatutos, y de acuerdo con las normas básicas que apruebe el Gobierno previo informe del Consejo de Coordinación Universitaria.

La determinación del área de conocimiento se regula dentro del Título IX *“Del profesorado”* dentro del Capítulo I *“De las universidades públicas”*, sección 2 *“Del profesorado de los cuerpos docentes universitarios”* en su Artículo 71 *“Áreas de conocimiento”* que dicta:

- (a) Las denominaciones de las plazas de la relación de puestos de trabajo de profesores funcionarios de cuerpos docentes universitarios corresponderán a las de las áreas de conocimiento existentes. A tal efecto, se entenderá por área de conocimiento aquel campo del saber caracterizado por la homogeneidad de su objeto de conocimiento, una común tradición histórica y la existencia de comunidades de profesores e investigadores, nacionales o internacionales.
- (b) El Gobierno establecerá y, en su caso, revisará el catálogo de áreas de conocimiento, previo informe del Consejo de Coordinación Universitaria.

Donde el número mínimo de profesores necesarios para constituir un Departamento viene determinado por los Estatutos de cada Universidad, dándoles la potestad de crear, modificar, suprimir o componer los Departamentos.

Estructuras propias de investigación

Del Título II *“De la estructura de las Universidades”*, Capítulo I *“De las Universidades públicas”* en su Artículo 10 se definen los Institutos Universitarios de Investigación para la LOMLOU, así como su regulación:

- (a) Los Institutos Universitarios de Investigación son centros dedicados a la investigación científica y técnica o a la creación artística. Podrán organizar y desarrollar programas y estudios de doctorado y de postgrado según los procedimientos previstos en los Estatutos, y proporcionar asesoramiento técnico en el ámbito de sus competencias. Los Institutos Universitarios de Investigación se regirán por la presente Ley, por los Estatutos, por el convenio de creación o de adscripción, en su caso, y por sus propias normas.
- (b) Los Institutos Universitarios de Investigación podrán ser constituidos por una o más universidades, o conjuntamente con otras entidades públicas o privadas mediante convenios u otras formas de cooperación, de conformidad con los Estatutos.
- (c) Para la creación y supresión de los Institutos Universitarios de Investigación se estará a lo dispuesto en el apartado 2 del artículo 8.
- (d) Mediante convenio, podrán adscribirse a Universidades públicas, como Institutos Universitarios de Investigación, instituciones o centros de investigación de carácter público o privado. La aprobación de la adscripción o, en su caso, desadscripción se hará por la Comunidad Autónoma, bien a propuesta del Consejo Social o bien por propia iniciativa con el acuerdo del referido Consejo y, en todo caso, previo informe del Consejo de Gobierno de la Universidad.

De lo señalado en el párrafo anterior será informado el Consejo de Coordinación Universitaria.

En la actualidad, tras la implantación de la LOU, la universidad española tiene tres tipos de estructuras propias de investigación:

- (A) Centros de investigación.
- (B) Institutos de investigación.
- (C) Institutos Universitarios de investigación.

Los centros de investigación e institutos de investigación son las entidades propias de investigación (EPI) de las universidades. Su única diferencia estriba en el tamaño del mismo en relación al número de investigadores adscritos a la EPI, la producción científica, tecnológica o artística de la EPI y el presupuesto que maneja la EPI, siendo el Instituto de mayor tamaño que el Centro. Los institutos universitarios de investigación son de mayor tamaño y presupuesto que los centros e institutos de investigación y su creación ha de ser aprobada por el Gobierno de la Comunidad Autónoma correspondiente. Todos los centros, institutos e institutos universitarios pueden ser participados por la universidad únicamente o por otros organismos públicos o privados en cuyo caso se llaman centros, institutos o institutos universitarios mixtos de investigación.

El Profesorado Universitario

El Título IX *"Del profesorado"* dentro del Capítulo I *"De las Universidades públicas"* sección 1 *"Del personal docente e investigador contratado"* en sus Artículos 48, 49, 50, 51, 52, 53 y 54 relata las categorías de personal docente e investigador contratado que son:

- (a) Ayudantes
- (b) Profesores ayudantes doctores
- (c) Profesores colaboradores
- (d) Profesores contratados doctores
- (e) Profesores asociados
- (f) Profesores eméritos y visitantes

El número total de personal docente e investigador contratado no podrá superar el cuarenta y nueve por ciento del total del personal docente e investigador de la Universidad.

Respecto al personal docente e investigador funcionario, su normativa se recoge en el Título IX *"Del profesorado"* dentro del Capítulo I *"De las Universidades públicas"*, sección 2 *"Del profesorado de los cuerpos docentes universitarios"* en su Artículo 56 *"Cuerpos docentes universitarios"* establece que los posibles cuerpos docentes en los que se puede establecer el profesorado funcionario:

1. El profesorado universitario funcionario pertenecerá a los siguientes cuerpos docentes:
 - (a) Catedráticos de Universidad.
 - (b) Profesores Titulares de Universidad.
 - (c) Catedráticos de Escuelas Universitarias.
 - (d) Profesores Titulares de Escuelas Universitarias.
2. Los Catedráticos y Profesores Titulares de Universidad tendrán plena capacidad docente e investigadora. Los Catedráticos y Profesores Titulares de Escuelas Universitarias tendrán plena capacidad docente y, cuando se hallen en posesión del título de Doctor, también plena capacidad investigadora.
3. El profesorado universitario funcionario se regirá por la presente Ley y sus disposiciones de desarrollo, por la legislación general de funcionarios que le sea de aplicación y por los Estatutos.

4. Respecto a los funcionarios de los cuerpos docentes universitarios que presten sus servicios en la Universidad, corresponderá al Rector adoptar las decisiones relativas a las situaciones administrativas y régimen disciplinario, a excepción de la de separación del servicio, que será acordada por el órgano competente según la legislación de funcionarios.

Posteriormente, modificó sus dos primeros puntos dejando solo en dos las figuras de profesor universitario funcionario, como dicta el Artículo 56 de la LOMLOU:

1. El profesorado universitario funcionario pertenecerá a los siguientes cuerpos docentes:
 - (a) Catedráticos de Universidad.
 - (b) Profesores Titulares de Universidad.
El profesorado perteneciente a ambos cuerpos tendrá plena capacidad docente e investigadora.
 - (c) El profesorado funcionario se regirá por las bases establecidas en esta Ley y en su desarrollo, por las disposiciones que, en virtud de sus competencias, dicten las Comunidades Autónomas, por la legislación general de funcionarios que les sea de aplicación y por los estatutos.

Respecto al personal docente investigador, la LOMLOU establece un cambio en cuanto al acceso del profesorado a estas figuras, sustituyendo el antiguo proceso de Habilitación por uno de Acreditación, tras el cual las universidades podrán elegir de entre los acreditados a aquellos cuyo perfil se amolde más a sus necesidades. Estos candidatos deberán poseer la acreditación para la figura a la que accedan. Dicha acreditación viene dada por la ANECA (Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación) que, reconvertida en Agencia estatal, tiene como fin facilitar los procesos de garantía de calidad y el establecimiento de criterios de evaluación. Este organismo será el que se encargue de establecer y aplicar los criterios para obtener la acreditación a cada una de las figuras de profesor docente e investigador. Todo esto viene recogido en la LOMLOU, Artículo 57 *"Acreditación nacional"*,

1. El acceso a los cuerpos de funcionarios docentes universitarios mencionados en el artículo 56.1 exigirá la previa obtención de una acreditación nacional que, valorando los méritos y competencias de los aspirantes, garantice la calidad en la selección del profesorado funcionario.

El Gobierno, previo informe del Consejo de Universidades, regulará el procedimiento de acreditación que, en todo caso, estará regido por los principios de publicidad, mérito y capacidad, en orden a garantizar una selección eficaz, eficiente, transparente y objetiva del profesorado funcionario, de acuerdo con los estándares internacionales evaluadores de la calidad docente e investigadora.

2. La acreditación será llevada a cabo mediante el examen y juicio sobre la documentación presentada por los solicitantes por comisiones compuestas por al menos siete profesoras y profesores de reconocido prestigio docente e investigador contrastado pertenecientes a los cuerpos de funcionarios docentes universitarios. Dichos profesores deberán ser catedráticos para la acreditación al Cuerpo de Catedráticos de Universidad, y catedráticos y profesores titulares para la acreditación al cuerpo de Profesores Titulares de Universidad.

Igualmente, podrán formar parte de estas comisiones expertos de reconocido prestigio internacional o pertenecientes a centros públicos de investigación.

Los currículos de los miembros de las comisiones de acreditación se harán públicos tras su nombramiento.

Reglamentariamente, se establecerá la composición de las comisiones reguladas en este apartado, la forma de determinación de sus componentes, así como su procedimiento de actuación y los plazos para resolver. En todo caso, deberá ajustarse a los principios de imparcialidad y profesionalidad de sus miembros, procurando una composición equilibrada entre mujeres y hombres, salvo que no sea posible por razones fundadas y objetivas debidamente motivadas.

3. En los supuestos de evaluación negativa, y con carácter previo a la resolución de la comisión, los interesados podrán presentar las alegaciones que consideren oportunas.
4. Una vez finalizado el procedimiento, se expedirá a favor del aspirante el correspondiente documento de acreditación.

Respecto a sus funciones, el artículo 33 de la LOU habla de la función docente: *“La docencia es un derecho y un deber de los profesores de las universidades que ejercerán, con libertad de cátedra, sin más límites que los establecidos en la Constitución y en las leyes y los derivados de la organización de las enseñanzas en las Universidades”*. Mientras que el artículo 40 de la LOU recoge la función investigadora: *“La investigación es un derecho y un deber del personal docente e investigador de las Universidades, de acuerdo con los fines generales de la Universidad, y dentro de los límites establecidos por el ordenamiento jurídico”*. Es más, la modificación de la LOU añade en el apartado 1bis: *“La universidad apoyará y promoverá la dedicación a la investigación de la totalidad del Personal Docente e Investigador permanente”*. Como se puede constatar, uno de los puntos que se considera importante en la LOU y la LOMLOU es la dedicación exclusiva del profesorado permanente, la cual redundará en una profesionalización de la tarea docente e investigadora. Se debe fomentar la exclusividad, pero sin impedir el acceso a la enseñanza de especialistas de reconocida competencia que desarrollan su actividad fuera de la Universidad. Es decir, se busca olvidar el modelo del docente que marginalmente investiga para llegar al investigador que tiene oportunidad de comunicar sus conocimientos.

El alumnado universitario

El alumnado es el núcleo central de la universidad, que está concebida como centro transmisor de conocimientos entre el profesorado y el alumnado. El Título VII *“De los estudiantes”* recoge la normativa de la LOU relativa al alumnado universitario. El Artículo 42 recoge el acceso a la universidad e indica como primer criterio que dicho acceso es un derecho de todos los españoles, siempre dentro del marco jurídico. Este artículo fue posteriormente modificado en la LOMLOU para asignar la responsabilidad de establecer las normas básicas de admisión al Gobierno, previo informe de la Conferencia General de Política Universitaria y respetando siempre los principios de igualdad, mérito y capacidad.

Los derechos y deberes de estos estudiantes vienen recogidos en el Artículo 46 *“De derechos y deberes de los estudiantes”* que fueron posteriormente modificados por la LOMLOU, quedando como sigue:

1. El estudio es un derecho y un deber de los estudiantes universitarios
2. Los estatutos y normas de organización y funcionamiento desarrollarán los derechos y los deberes de los estudiantes, así como los mecanismos para su garantía.
En los términos establecidos por el ordenamiento jurídico, los estudiantes tendrán derecho a:
 - a- El estudio en la universidad de su elección, en los términos establecidos por el ordenamiento jurídico.
 - b- La igualdad de oportunidades y no discriminación por razones de sexo, raza, religión o discapacidad o cualquier otra condición o circunstancia personal o social en el acceso a la universidad, ingreso en los centros, permanencia en la universidad y ejercicio de sus derechos académicos.
 - c- La orientación e información por la universidad sobre las actividades de la misma que les afecten.
 - d- La publicidad de las normas de las universidades que deban regular la verificación de los conocimientos de sus estudiantes.
 - e- El asesoramiento y asistencia por parte de profesores y tutores en el modo en que se determine.
 - f- Su representación en los órganos de gobierno y representación de la universidad, en los términos establecidos en esta Ley y en los respectivos estatutos o normas de organización y funcionamiento.
 - g- La libertad de expresión, de reunión y de asociación en el ámbito universitario.
 - h- La garantía de sus derechos, mediante procedimientos adecuados y, en su caso, la actuación del Defensor Universitario.

- i- La obtención del reconocimiento académico por su participación en actividades universitarias culturales, deportivas, de representación estudiantil, solidarias y de cooperación.
 - j- La recepción de un trato no sexista.
 - k- La atención que facilite compaginar los estudios con la actividad laboral
3. Las universidades establecerán los procedimientos de verificación de los conocimientos de los estudiantes.
- En las universidades públicas, el Consejo Social, previo informe del Consejo de Coordinación Universitaria, aprobará las normas que regulen el progreso y la permanencia en la universidad de los estudiantes de acuerdo con las características de los respectivos estudios.
4. Los estudiantes gozarán de la protección de la Seguridad Social en los términos y condiciones que establezca la legislación vigente.

Los derechos y deberes del alumnado anteriormente mencionados vienen recogidos en el Estatuto del Estudiante Universitario publicado como Real Decreto 1791/2010 el 30 de diciembre de 2010. Los términos concretos de este estatuto ven la luz a raíz de la publicación de la LOMLOU, donde se crea la Comisión Permanente del Consejo de Estudiantes Universitarios del Estado.

Gobierno y representación de las Universidades

La LOMLOU indica, como se recoge en la introducción de este capítulo, en el artículo 13 que los Estatutos de las Universidades Públicas establecerán, al menos, los siguientes órganos colegiados: Consejo Social, Consejo de Gobierno, Claustro Universitario, Juntas de Escuela y Facultad, y Consejos de Departamento. En los próximos párrafos veremos la definición y atribuciones de estos órganos. El Consejo Social es el órgano de participación de la sociedad en la universidad y debe ejercer como elemento de interrelación entre esta y la sociedad. Corresponde al Consejo Social supervisar las actividades de carácter económico de la universidad y el rendimiento de sus servicios, así como promover la colaboración de la sociedad en la financiación de esta. A tal fin, aprobará un plan anual de actuaciones destinado a promover las relaciones entre la universidad y su entorno cultural, profesional, económico y social, todo ello, al servicio de la calidad de la actividad universitaria. Los consejos sociales podrán disponer de la oportuna información y asesoramiento de los órganos de evaluación de las Comunidades Autónomas y de la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación. La Ley de la Comunidad Autónoma regulará la composición y funciones del Consejo Social y la designación de sus miembros de entre personalidades de la vida cultural, profesional, económica, laboral y social, que no podrán ser miembros

de la propia comunidad universitaria. Serán, no obstante, miembros del Consejo Social, el Rector, el Secretario General y el Gerente, así como un profesor, un estudiante y un representante del personal de administración y servicios, elegidos por el Consejo de Gobierno de entre sus miembros. El presidente del Consejo Social será nombrado por la Comunidad Autónoma en la forma que determine la Ley respectiva. (Art. 14, LOMLOU).

El Consejo de Gobierno es el órgano de gobierno de la universidad. Establece sus líneas estratégicas y programáticas, así como las directrices y procedimientos para su aplicación en los ámbitos de organización de las enseñanzas, investigación recursos humanos y económicos y elaboración de los presupuestos, y ejerce las funciones previstas en la Ley y las que establezcan los Estatutos. (Art. 15, Ap. 1, LOU). El Consejo de Gobierno estará constituido por el Rector, que lo presidirá, el Secretario General y el Gerente, y por un máximo de 50 miembros. Del mismo formarán parte además los Vicerrectores, una representación de la comunidad universitaria que refleje la composición de los distintos sectores en el Claustro, y una representación de Decanos y Directores, según establezcan los Estatutos. Además, cuando así lo determinen los Estatutos, podrán ser miembros del Consejo de Gobierno hasta un máximo de tres miembros del Consejo Social no pertenecientes a la propia comunidad universitaria. (Art. 15, Ap. 2, LOMLOU).

El Claustro Universitario es el máximo órgano de representación de la comunidad universitaria. Estará formado por el Rector, que lo presidirá, el Secretario General y el Gerente, y un máximo de 300 miembros. Le corresponde la elaboración de los Estatutos, la elección de Rector, en su caso, y las demás funciones que le atribuye esta Ley. (Art. 16, Ap. 1, LOMLOU). Los Estatutos regularán la composición y duración del mandato del Claustro, en el que estarán representados los distintos sectores de la comunidad universitaria. En todo caso, la mayoría de sus miembros serán profesores doctores con vinculación permanente a la universidad. (Art. 16, Ap. 3, LOMLOU). La diferencia con los Claustros de la LRU radica en la limitación del número de miembros a 400 y en un aumento de la representación del número de docentes doctores cuya representación mínima se fija en el 50 %. En la mayoría de las universidades esta norma ha significado una disminución de la representación del resto de colectivos, profesorado no doctor, PAS y alumnado. En la LOU se fijaba un mínimo del 51 % de profesores funcionarios doctores, excluyendo a los profesores contratados que fueran doctores. La LOMLOU reparó dicho agravio entre doctores incluyendo a profesores con contrato indefinido que fueran doctores (profesores contratados doctores y profesores colaboradores doctores).

La Junta de Escuela o Facultad, presidida por el Decano o Director, es el órgano de Gobierno de esta. La composición y el procedimiento de elección de sus miembros serán determinados por los Estatutos. En todo caso, la mayoría de sus miembros serán profesores doctores con vinculación permanente a la universidad. (Art. 18, LOMLOU). De nuevo, en este apartado, la LOMLOU repara el agravio comparativo entre profesores funcionarios doctores y no doctores permitiendo a estos últimos pertenecer a la Junta de Escuela o Fa-

cultad.

El Consejo de Departamento, presidido por su Director, es el órgano de gobierno del mismo. Estará integrado por los doctores miembros del departamento, así como por una representación del resto de personal docente e investigador no doctor en la forma en la que determinen los Estatutos. En todo caso, los Estatutos garantizarán la presencia de una representación de los estudiantes y del personal de administración y servicios. (Art. 19, LOU). En estos dos últimos órganos, la LOU promueve un incremento de representación de los cuerpos docentes doctores como ocurre con el resto de órganos colegiados.

Calidad universitaria y sistemas de evaluación

La evaluación del profesorado universitario se realiza mediante análisis de sus dos principales funciones, la docente y la investigadora. La evaluación de la calidad investigadora de los profesores universitarios y del personal de las escalas científicas de los organismos públicos de investigación de la Administración General del Estado lo realiza la Comisión Nacional Evaluadora de la Actividad Investigadora (CNEAI), con el objeto de que les sea reconocido como complemento de productividad (sexenio).

Como consecuencia de la modificación de la Ley Orgánica de Universidades 6/2001, de 21 de diciembre, a partir del artículo 7 de la Ley 15/2014, de 16 de septiembre, de racionalización del sector público y otras medidas de reforma administrativa, el organismo autónomo ANECA lleva a cabo las funciones de evaluación que hasta ahora desarrollaba la actual Comisión Nacional Evaluadora de la Actividad Investigadora (CNEAI), y así se ha recogido en el Estatuto del Organismo Autónomo ANECA. Lo que implica que la CNEAI forma parte de la ANECA.

De esta forma, la CNEAI está presidida por el Director de ANECA y está formada por un representante designado por cada una de las Comunidades Autónomas con competencia en materia de universidades y/o investigación, y rango de, al menos, Director General. Asimismo, formarán parte de la CNEAI doce académicos e investigadores que serán designados por la persona titular de la Secretaría de Estado con competencia en materia de universidades. Actuará como secretario de la CNEAI el Director de la División de Evaluación del Profesorado de la ANECA, quien será también miembro de pleno derecho.

Por otra parte, tenemos la evaluación de la actividad docente, cuya potestad reside en la propia universidad a través de encuestas al alumnado. Con estas encuestas, las universidades públicas españolas suelen evaluar los períodos docentes de cinco años (quinquenios) que, al igual que los sexenios investigadores, también incorpora incentivos retributivos. Los resultados de las diferentes preguntas de la Encuesta del Profesorado se plasman en una calificación de entre 0 y 10 que permiten que el profesorado conozca a grandes rasgos la opinión que de la calidad de su docencia tiene el alumnado en aspectos tales como preparación de las clases, dominio de la materia impartida, organización de las prácticas,

etc., así como labor global, e incluyendo la opinión del estudiante sobre si el profesorado emite sus calificaciones con justicia y acierto. Dicha evaluación es un mecanismo útil para informarnos de la percepción que el alumnado tiene de nuestro trabajo y para ser utilizada con fines de mejora y perfeccionamiento docente y para realizar análisis comparativos entre los comportamientos individuales y los colectivos, pero que, en mi opinión no debiera ser el único indicador a tener en cuenta para evaluar la calidad docente o ser utilizado con fines sancionadores (salvo casos excepcionales).

Dentro de la evaluación de la calidad universitaria, también se evalúan los centros. Corresponde a la ANECA, entre otras funciones, la de proporcionar información adecuada a las Administraciones Públicas y a otros agentes relevantes del sistema universitario para su toma de decisiones al elaborar las políticas educativas que les corresponden. El Informe sobre el estado de la evaluación externa de la calidad en las universidades españolas responde precisa y fundamentalmente a esta última función.

2.2. Legislación y contexto educativo español

La universidad, como institución responsable de la educación superior, está llamada a ser motor del desarrollo científico, técnico y cultural de la sociedad. Existe un consenso generalizado sobre las funciones que una universidad moderna debe desarrollar, las cuales, de forma genérica, coinciden con las recogidas por la legislación vigente:

- La creación, desarrollo, transmisión y crítica de la ciencia, la técnica y la cultura, en todas sus vertientes.
- La preparación para el ejercicio de actividades profesionales que exijan la aplicación de conocimientos y métodos científicos y para la creación artística.
- La difusión, la valorización y la transferencia del conocimiento al servicio de la cultura, de la calidad de la vida, y del desarrollo económico.
- La difusión del conocimiento y la cultura a través de la extensión universitaria y la formación a lo largo de toda la vida.

Para alcanzar estos compromisos, la universidad encauza su labor a través de dos vertientes muy relacionadas entre sí:

- Las actividades de formación, encargadas de la transmisión de conocimientos y dirigidas a la preparación de profesionales cualificados y a la formación de futuros investigadores.
- Las actividades de investigación, destinadas fundamentalmente a la creación científica y al desarrollo tecnológico.

El enfoque de estas dos actividades básicas, junto con las disponibilidades presupuestarias, de infraestructura y de todo tipo, relacionadas con las anteriores, son de vital importancia para un desarrollo satisfactorio de las funciones encomendadas a la universidad.

El sistema universitario español, que constituye el marco legal bajo el que cualquier proyecto docente debe ser elaborado, se ha ido adaptando a las exigencias educativas y a la evolución de su entorno. A partir de la promulgación de la Ley Orgánica 11/1983 de Reforma Universitaria (lru), dicho sistema ha experimentado transformaciones de gran importancia en autonomía y modernización, además de un notable incremento en el número de instituciones públicas, la calidad de la investigación y la actualización de los planes de estudio de las distintas titulaciones, entre otros aspectos.

Esta continua adaptación hacia las demandas de la sociedad desembocó en la Ley Orgánica 6/2001 de Universidades (lou) y en un proceso de consolidación hacia el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES, presentado en el capítulo anterior), nacido en la Declaración de Bolonia de 1999, orientado a conseguir dos objetivos estratégicos: el incremento del empleo en la Unión Europea y la mejora en la adecuación del nuevo sistema europeo de formación superior a los de otras partes del mundo.

Los actuales estudios universitarios se rigen por la lou y sus sucesivas revisiones (lomlou, Reales Decretos 1125/2003, 1393/2007 y 861/2010), hasta la versión vigente de julio de 2018. El objetivo fundamental de esta ley es dotar al sistema universitario de un marco normativo que estimule su dinamismo y le permita realizar una docencia de calidad y una investigación de excelencia, con el fin de profundizar en la creación y transmisión del conocimiento.

El Real Decreto 1125/2003 de 5 de septiembre establece el sistema europeo de créditos ECTS en las titulaciones universitarias oficiales de Grado y de Postgrado españolas. Como hemos comentado antes, esta necesidad de homogeneidad en la duración de los estudios en los países del EEES surgió a raíz de la demanda de procedimientos eficaces en las equivalencias y reconocimientos de los estudios cursados en el extranjero a través de los programas de movilidad Sócrates y Erasmus. Este Real Decreto define el ECTS como sigue:

“El crédito europeo (ECTS) es la unidad de medida del haber académico que representa la cantidad de trabajo del estudiante para cumplir los objetivos del programa de estudios y se obtiene por la superación de cada una de las materias que integran los planes de estudios de las diversas enseñanzas conducentes a la obtención de títulos universitarios de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional. En esta unidad de medida se integran las enseñanzas teóricas y prácticas, así como otras actividades académicas dirigidas, con inclusión de las horas de estudio y de trabajo que el estudiante debe realizar para alcanzar los objetivos formativos propios de cada una de las materias del correspondiente plan de estudios”.

Además, cuantifica la duración de las titulaciones:

- El número total de ECTS establecido en los planes de estudios para cada curso académico será de 60.
- El número de créditos de cada titulación será distribuido entre la totalidad de las materias integradas en el plan de estudios que deba cursar el alumno en función del número total de horas que comporte la superación o realización de cada una de ellas.
- En la asignación de créditos a cada una de las materias que configuren el plan de estudios se computará el número de horas de trabajo requeridas para la adquisición por los estudiantes de los conocimientos, capacidades y destrezas correspondientes. En esta asignación deberán estar comprendidas las horas correspondientes a las clases lectivas, teóricas o prácticas, las horas de estudio, las dedicadas a la realización de seminarios, trabajos, prácticas o proyectos, y las exigidas para la preparación y realización de los exámenes y pruebas de evaluación.
- Esta asignación de créditos y la estimación de su correspondiente número de horas se entenderá referida a un estudiante dedicado a cursar a tiempo completo estudios universitarios durante un mínimo de 36 y un máximo de 40 semanas por curso académico.
- El número mínimo de horas, por crédito, será de 25 y el número máximo de 30.
- El Gobierno fijará el número mínimo de créditos asignados a una determinada materia en los planes de estudio de los títulos universitarios oficiales

La implementación de esta conversión se introdujo enseguida con el fin de facilitar el intercambio académico de los estudiantes, a la espera de la elaboración de los nuevos planes de estudio que se implantaron, de forma global, a partir del curso 2010-2011.

El Real Decreto 1393/2007 establece la estructura de las enseñanzas universitarias oficiales (Grado, Máster y Doctorado), regulando los aspectos básicos de la ordenación de las titulaciones universitarias y el procedimiento de verificación y acreditación que deben superar los planes de estudio. Es decir, clarifica muchas cuestiones necesarias a la hora de configurar los nuevos planes de estudio. Algunos de los puntos destacados del mencionado Real Decreto son los siguientes:

- Permite a las propias universidades crear y proponer, de acuerdo con las reglas establecidas, las enseñanzas y títulos que hayan de impartir y expedir, sin sujeción a la existencia de un catálogo previo establecido por el Gobierno, como hasta ahora era obligado.
- Adopta una serie de medidas que, además de ser compatibles con el EEES, flexibilizan la organización de las enseñanzas universitarias, promoviendo la diversificación

curricular y permitiendo que las universidades aprovechen su capacidad de innovación, su fortaleza y sus oportunidades.

- Impulsa un cambio en las metodologías docentes, que centra el objetivo en el proceso de aprendizaje del estudiante.
- Recomienda que en el diseño de los títulos se reflejen otros elementos además de la mera descripción de los contenidos formativos, tales como justificación, objetivos, admisión de estudiantes, contenidos, planificación, recursos, resultados previstos y sistema de garantía de calidad.
- Propone los ECTS como unidad de medida que refleja los resultados del aprendizaje, así como el volumen de trabajo realizado por el estudiante, para alcanzar los objetivos establecidos en el plan de estudios.
- En el supuesto de títulos que habiliten para el acceso o ejercicio de actividades profesionales, deja a criterio del Gobierno el establecimiento de las condiciones a las que deberán adecuarse los planes de estudios para garantizar que los títulos acreditan la posesión de las competencias y conocimientos adecuados para dicho ejercicio profesional.
- Garantiza los derechos académicos adquiridos por los estudiantes y los titulados conforme a sistemas educativos anteriores.
- Potencia la apertura de las universidades hacia los estudiantes procedentes de otros países del EEES y de otras áreas geográficas.
- Fomenta la movilidad de los estudiantes, tanto dentro de Europa como con otras partes del mundo –y sobre todo la movilidad entre las distintas universidades españolas y dentro de una misma universidad– mediante un sistema de reconocimiento y acumulación de créditos, en el que los créditos cursados en otra universidad serán reconocidos e incorporados al expediente del estudiante.
- Establece vínculos adecuados y necesarios entre el EEES y el Espacio Europeo de Investigación.

En lo que respecta a los objetivos formativos de los nuevos planes de estudio de Grado, en el Documento Marco sobre la Integración del Sistema Universitario Español en el EEES se expone que:

“Los objetivos formativos de las enseñanzas oficiales de nivel de grado tendrán, con carácter general, una orientación profesional, es decir, deberán proporcionar una formación universitaria en la que se integren armónicamente las competencias genéricas básicas, las competencias transversales relacionadas con

la formación integral de las personas y las competencias más específicas que posibiliten una orientación profesional que permita a los titulados una integración en el mercado de trabajo.”

Por último, el Real Decreto 861/2010 de 2 de julio introdujo algunos ajustes necesarios para garantizar una mayor fluidez en los criterios y procedimientos anteriores. Así, entre otros aspectos, se introdujeron nuevas posibilidades en materia de reconocimiento de créditos por parte de las universidades, se posibilitó que las universidades completasen el diseño de sus títulos de grado con menciones o itinerarios de intensificación curriculares concretas, se extendió la habilitación para emitir informes de evaluación en el procedimiento de verificación, además de a la ANECA, a otros órganos de evaluación de las comunidades autónomas, y finalmente, se revisaron los procedimientos de verificación, modificación, seguimiento y renovación de la acreditación para mejorar su definición.

Todo este proceso de homogeneización en las titulaciones ha generado una nueva estructura en la enseñanza superior compuesta por tres ciclos: Grado, Máster y Doctorado, donde tanto el Grado como el Máster deben estar vinculados a algunas de las siguientes ramas de conocimiento: Artes y Humanidades, Ciencias, Ciencias de la Salud, Ciencias Sociales y Jurídicas o Ingeniería y Arquitectura.

El primer ciclo o Grado, que tiene una duración de cuatro cursos, consta de 240 ect, está orientado hacia el mercado laboral con un nivel apropiado de cualificación y en él se fomenta el aprendizaje básico junto a otros orientados a las actividades profesionales.

El título oficial de Grado está compuesto por:

- Asignaturas de formación básica (mínimo de 60 créditos).
- Asignaturas obligatorias.
- Asignaturas optativas.
- Prácticas externas (máximo de 60 créditos).
- Trabajo Fin de Grado (mínimo de 6 créditos y un máximo de 30).
- Reconocimiento por actividades culturales (máximo de 6 créditos). El estudiante debe matricularse de un mínimo de 9 créditos y de un máximo de 90 en cada curso académico.

Los estudios de Posgrado tienen como finalidad la especialización del estudiante en su formación académica, profesional o investigadora y conducen a la obtención de los títulos de Máster y Doctorado. Las características del título de Máster son las siguientes:

- Extensión de entre 60 y 120 ect (1-2 años).

- Los objetivos formativos serán más específicos y avanzados que los de Grado, de carácter especializado o multidisciplinar, dirigidos hacia una especialización académica o profesional, o a promover la iniciación a la investigación.
- Los programas deberán tener una estructura flexible y un sistema de reconocimiento y de conversión que permitan el acceso desde distintas formaciones previas. Los contenidos se definen en función de las competencias científicas y profesionales que hayan de adquirirse.

Los estudios de Doctorado se podrán realizar cuando se haya superado un mínimo de 60 créditos del programa de Máster y acumulado un total de 300 créditos entre el título de Grado y los contenidos realizados de Posgrado. Tendrán como finalidad la formación avanzada del estudiante en las técnicas de investigación, podrán incluir cursos, seminarios u otras actividades dirigidas a la formación investigadora e incluirán la elaboración y presentación de la tesis doctoral, que será un trabajo de investigación original. La superación de este grado dará lugar al título de Doctor, que representa el nivel más elevado de la educación superior.

CAPÍTULO

3

EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Después de revisar los contextos institucional y académico, finalizamos analizando el contexto curricular e instruccional, donde haremos una breve reflexión sobre la planificación de la actividad docente universitaria y los objetivos de aprendizaje.

3.1. Planificación

La enseñanza universitaria tiene la doble finalidad de preparar profesionales cualificados y completar su formación integral. Esta formación se materializa en la adquisición de un conjunto de conocimientos, habilidades y estrategias adecuados a cada perfil, donde el binomio enseñanza- aprendizaje tiene un papel protagonista. Como adelantábamos en capítulos anteriores, la integración en el EEES ha promovido una importante transformación en el diseño de la enseñanza universitaria, modificando el eje metodológico desde la enseñanza hacia el aprendizaje. En la actualidad estamos centrados en el aprendizaje del alumno más que en la enseñanza del profesor. Así, se pretende que los estudiantes aprendan de forma profunda y significativa y que adquieran recursos para llevar a cabo ese aprendizaje de forma autónoma. Para ello se exige al profesor TU un cambio de rol,

investigador pasando de estar centrado casi exclusivamente en la clase magistral, a una visión más amplia y global que incluye tutoría, seguimiento y planificación de la enseñanza. De este modo, al profesor se le pide que acompañe y sirva de guía al alumnado a través de un conjunto de actividades educativas, entre las que la clase presencial es un elemento más para la consecución de una serie de competencias en las que los conocimientos (su comprensión y su manejo) son solo una parte. En este sentido, hacer al alumnado capaz de gestionar la información que recibe para convertirla en verdadero conocimiento se ha convertido en uno de los ejes centrales de la formación universitaria.

Para facilitar este proceso de enseñanza-aprendizaje, en el que alumno es el verdadero protagonista, el profesor debe realizar una adecuada planificación de su actividad docente. En primer lugar, debemos formular los objetivos de aprendizaje que pretendemos alcanzar, para así seleccionar contenidos adecuados al perfil e intereses del alumnado y secuenciarlos temporalmente.

En este contexto, no basta ser un experto en los contenidos que se imparten, ya que la forma de exponerlos y trabajar con ellos también es muy importante. Y es en este punto donde una adecuada elección de la metodología docente nos facilitará la tarea de motivar al alumno y, sobre todo, de potenciar el aprendizaje significativo de los contenidos y la consecución de los resultados de aprendizaje.

Por otro lado, hemos de ser conscientes de que en el aula convive una gran variedad de estilos de aprendizaje y motivaciones diferentes. Por ello, es conveniente respetar al máximo esta diversidad y plantear una variedad razonable de actividades y metodologías para adaptarnos a la mayor cantidad de alumnos posible. No debemos olvidar la importancia de una adecuada evaluación en todo este proceso, ya que nos permite conocer la eficacia de nuestra docencia, mientras que al alumno le facilita información sobre sus progresos y deficiencias, dándole la oportunidad de mejorar. Por lo tanto, consideramos muy recomendable algún tipo de evaluación inicial que sirva de diagnóstico eficaz para empezar a construir el conocimiento sobre bases consolidadas, así como un proceso de evaluación continua y formativa que vaya analizando su correcta progresión.

Otro factor decisivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje es una comunicación fluida entre el profesor y los alumnos que nos facilite el conocerlos mejor y percibir así sus necesidades reales, además de proporcionar la retroalimentación del proceso, observando sus puntos fuertes y débiles para poder actuar en consecuencia. Una buena vía para mejorar en este aspecto es proponer actividades que faciliten un acercamiento entre ambos a través de la tutoría personalizada.

Como hemos visto, la planificación del proceso educativo se lleva a cabo en diversas etapas, todas ellas muy relacionadas entre sí: formulación de los objetivos de aprendizaje, selección de los contenidos, secuenciación temporal, planteamiento de la metodología (estrategias docentes, actividades de enseñanza-aprendizaje, recursos, etc.) y diseño de la evaluación.

Al planificar nuestra asignatura la primera cuestión que nos planteamos es “¿qué enseñar y para qué?”. La respuesta viene marcada por la estructura del plan de estudios y los descriptores de la asignatura. Sin embargo, estas directrices suelen ser poco precisas y el profesor es el responsable de concretarlas. Esta materialización de los contenidos debemos realizarla a través de una selección adecuada de objetivos que debemos cumplir.

Una vez definidos los contenidos de nuestro programa nos preguntamos “¿cuándo enseñar?”, cuya respuesta es la secuenciación lógica y ordenación temporal de estos, así como el ritmo del proceso instruccional, para facilitar la consecución de los objetivos de aprendizaje de la mejor manera posible. En esta fase se busca asegurar que el alumnado construya su aprendizaje sobre la base de lo aprendido con anterioridad.

Una vez fijados los contenidos, y su secuenciación temporal, llegamos a la cuestión “¿cómo enseñar?”. En este punto decidiremos los métodos docentes, las actividades y los recursos más adecuados; es decir, fijaremos la metodología que vamos a utilizar. Cabe destacar que, si nuestra principal meta como docentes es convertir al estudiante en un elemento activo del proceso de reflexión que se lleva a cabo en el aula, combinaremos las clases magistrales con una enseñanza centrada en la indagación. Para nuestra práctica docente la actividad que se realiza dentro del aula implica una verdadera reflexión, un intercambio y una oportunidad de formación tanto para el alumno como para el profesor.

Finalmente, es imprescindible realizar una evaluación objetiva, cuantitativa, e individualizada para cada alumno, que nos permita valorar si ha alcanzado los objetivos previstos. Llegamos, pues, a las preguntas “¿qué, cómo y cuándo evaluar?”.

Para optimizar el aprendizaje de nuestros alumnos, la planificación instruccional requiere una constante revisión, siempre reformulando estas preguntas básicas y utilizando la realimentación que nos proporciona la evaluación, los comentarios de los alumnos y la TU investigador interacción con el resto de profesores. Además, cabe destacar la necesidad de que exista coherencia e integración entre todos los componentes de la planificación (objetivos y competencias, contenidos y secuenciación, metodología docente y evaluación), para facilitar la consecución de los resultados de aprendizaje.

3.2. Objetivos del aprendizaje

Los objetivos del aprendizaje son los resultados que se esperan obtener como consecuencia de nuestra actividad docente. Así, dentro del marco del estudio teórico de cómo se adquieren estos objetivos de aprendizaje, se desarrollaron varios estudios en los que se jerarquizaban los procesos cognitivos en diferentes niveles para facilitar las tareas de evaluación. A finales de la década de los años 40 del siglo XX, se publicó un informe de un grupo de docentes y educadores al finalizar la Convención de la Asociación Norteamericana de Psicología que se hizo famosa: la taxonomía de Bloom [1]. En esta taxonomía, los objetivos del aprendizaje se dividen en tres dominios diferentes, la dimensión afectiva,

psicomotora y cognitiva. La comisión, liderada por el Dr. Benjamin Bloom, se centró en el desarrollo de los objetivos en el marco cognitivo y afectivo, pero no en la psicomotor.

En 2001, Anderson y Krathwohl [2] tras revisar el modelo de la taxonomía de Bloom, definieron un subconjunto de los niveles en que se separaba cada dimensión. Así, en la cognitiva se cambia la jerarquía de los procesos cognitivos. En esta dimensión cognitiva, los autores definieron distintos tipos y subtipos de conocimiento, clasificándolos como:

Conocimiento factual, que son los elementos básicos que todo estudiante debe conocer de una disciplina o para resolver problemas planteados en ella. Aquí se puede distinguir entre el conocimiento de la terminología y también de detalles específicos y elementos.

Conocimiento conceptual, que son interrelaciones entre elementos básicos en una estructura mayor que los habilita para que funcionen juntos. Aquí podemos discernir entre el conocimiento de clasificación y categorías, principios y generalizaciones y, finalmente, de teorías, modelos y estructuras.

Conocimiento procedimental, que se relaciona con cómo hacer algo, métodos de indagación y criterios para el uso de habilidades, algoritmos, técnicas y métodos. Este tipo de conocimiento se subdivide en: conocimiento de habilidades específicas de la materia y algoritmos, conocimiento de técnicas específicas de la materia y sus métodos y, por último, conocimiento de criterios para determinar cuándo se usan procedimientos apropiados.

Conocimiento metacognitivo, conocimiento en general, tanto como conciencia como conocimiento de lo que uno mismo conoce. Este tipo de conocimiento se divide en: conocimiento estratégico, conocimiento sobre tareas cognitivas, incluyendo el contexto apropiado y el conocimiento condicional y finalmente, autoconocimiento.

Siguiendo la filosofía de actualización de las teorías relativas a la adquisición y procesamiento de los procesos mentales y los conocimientos propuesta por Anderson y Krathwohl [2], en 2007 se promulgó una nueva taxonomía por Marzano y Kendall [3]. En ella, se basa el conocimiento en competencias e introduce la dificultad para ejecutar un proceso mental en función de dos factores: la complejidad inherente del proceso en términos de los pasos o fases que involucra y el nivel de familiaridad que uno tiene con respecto al proceso. Respecto a la taxonomía de Bloom, pasamos de seis niveles cognitivos a cinco:

1. Problematicación y disposición
2. Adquisición y organización del conocimiento
3. El procesamiento de la información

4. Aplicación de la información
5. La conciencia del proceso de autoaprendizaje

Circunscribiéndonos a los objetivos concretos que queremos lograr al impartir las asignaturas objeto de este Proyecto Docente, podemos clasificarlos con un criterio temporal. Estos pueden estar referidos a

la titulación completa, objetivos relacionados con la preparación para el ejercicio profesional de la titulación. Fundamentalmente son elaborados por el Consejo de Universidades y por el Centro. Además de los cognitivos y procedimentales será importante diseñar la forma de lograr objetivos relacionados con las competencias que debe adquirir el egresado para el correcto desarrollo de su etapa laboral. Teniendo en cuenta que estos profesionales ocupan puestos de relativa responsabilidad, será también importante una educación en valores en la que se tenga en cuenta la ética profesional, la solidaridad y el respeto al medio ambiente. El diseño de los objetivos globales del acto docente destinado a la preparación de titulados exige de una visión global del conjunto del currículum que se ofrece a los estudiantes, en función de las metas profesionales de los graduados que salgan de la Universidad.

un curso académico, objetivos finales que se pretenden alcanzar al final de una asignatura. Estos objetivos deben tener coherencia y concierto con los propuestos por el resto de los profesores de la misma asignatura. En este apartado, es importante tener altura de miras y diseñar los objetivos finales que se pretenden alcanzar de manera global y no en forma compartimental. También se ha de considerar el desarrollo de las competencias del alumnado.

una unidad temática, son los objetivos que se pretenden alcanzar correspondientes al bloque temático o unidades en las que se separa cada asignatura. El anterior diseño particular de objetivos nunca debe olvidar los objetivos a largo plazo que se pretenden alcanzar, razón por la que el diseño de objetivos, aunque separados en conjuntos cada vez más locales, deben tener en cuenta los planteamientos más generales.

Además, cabe tener en cuenta que las asignaturas impartidas por el Departamento de Astrofísica de la ULL deben proporcionar conocimiento sobre la astrofísica, tanto teórica como observacional, los procedimientos propios de las ciencias experimentales (diseño de experiencias, medidas, análisis de datos, conclusiones de las experiencias) y las actitudes propias de las ciencias (rigor, análisis, juicio crítico).

Se debe actuar de forma que estos elementos sean motivadores para el alumnado, planteando un programa atractivo por los conocimientos en sí que se imparten y aprovechando el fuerte interés que tiene el alumnado por asignaturas más directamente relacionadas con

las aplicaciones de su especialidad, relacionando estrechamente el programa con las necesidades de dichas asignaturas. La utilización de numerosos ejemplos y aplicaciones a problemas concretos de su interés, la elaboración de introducciones apropiadas a los temas que se vayan a desarrollar y el fomento de la discusión sobre aspectos teóricos de cuestiones prácticas serán de gran ayuda para mantener el interés y la motivación del alumnado.

En una formación completa del alumnado y de acuerdo con lo dictado en el Espacio Europeo de la Educación Superior (EEES), los objetivos formativos no deben ser exclusivamente académicos y deben venir acompañados por la obtención de competencias, ya que permitan un desarrollo completo, no solo a la hora de incorporarse a la vida laboral sino también al incorporarse como miembro activo y maduro en la sociedad.

3.3. Métodos de enseñanza

Como se ha comentado anteriormente, la entrada en el EEES impulsa a la Universidad hacia un nuevo paradigma, donde la enseñanza ya no se entiende como una mera transmisión de conocimiento del profesor hacia el estudiante, sino que sitúa al alumno como protagonista de su aprendizaje, convirtiendo al profesor en un guía que le facilite la adquisición de los conocimientos y habilidades necesarias para un correcto desempeño en su ámbito profesional. De esta manera la enseñanza centrada solo en el aula se diversifica a trabajo presencial y no presencial, donde resulta de vital importancia el trabajo autónomo de los alumnos.

En consecuencia, debemos planificar nuestra actividad con métodos docentes adecuados a este nuevo enfoque, considerando el entorno donde nos encontramos. Otro aspecto que no debemos olvidar es que el crédito ECTS tiene asociada una carga cuantitativa de trabajo del alumno y es necesario tenerlo en cuenta a la hora de diseñar las actividades presenciales –clases teóricas-prácticas, seminarios, tutorías, etc.–, así como las actividades que el alumno realizará de forma autónoma –trabajo en línea, estudio, trabajos en equipo, etc. Según este concepto no son, naturalmente, sólo las horas de clase las que deben de contarse como dedicación, sino el conjunto de las tareas que se le pide al alumno en cada caso, su planificación detallada, el seguimiento de las actividades o las experiencias educativas y su evaluación.

Un método de enseñanza se puede definir como un conjunto de técnicas y actividades que un profesor usa con el fin de lograr uno o varios objetivos educativos, que tiene sentido como un todo y que responde a una denominación conocida y compartida por la comunidad científica [4].

A continuación, de entre los 25 métodos de enseñanza señalados por la literatura científica [4], enumeramos algunos que nos permitirán alcanzar nuestros objetivos docentes favoreciendo el aprendizaje autónomo y la adquisición de competencias del alumnado.

Clase magistral

La clase magistral consiste en la exposición de un tema con el objetivo de transmitir y facilitar información estructurada sobre el mismo. Es el método de enseñanza más empleado en la docencia universitaria, debido a su economía de medios y su eficiencia en la relación entre cantidad de información y tiempo empleado, por un lado y, por otro, la elevada relación de número de alumnos por profesor que permite.

La clase magistral ha sido mayoritariamente denostada en artículos de innovación docente, pero, sin embargo, no por el hecho de ser un método antiguo habría de ser malo per se. La mayoría de críticas a este método pueden listarse, según recoge Rodríguez Sánchez [5] en:

1. El profesorado se erige como única fuente de información y empobrece el conocimiento al que puede acceder el alumnado.
2. Las funciones del profesorado se reducen a la mera exposición comunicativa de su propio conocimiento.
3. El alumnado tiene una actitud pasiva, lo que va en contra del propio espíritu del EEES.
4. Se sobreestima la enseñanza sobre el aprendizaje.
5. No hay un seguimiento del alumnado, por lo que no hay ninguna referencia de que el mensaje esté llegando.
6. Tradicionalmente se ha abusado de este método.
7. Dificultad en la consecución de objetivos y competencias por las propias limitaciones del método.
8. El docente adquiere una figura de autoridad indiscutible e indiscutida, en vez de guía, como indica el propio EEES.

Sin embargo, las deficiencias encontradas no están circunscritas al método en sí, sino a la mala praxis que se hace de él por parte del profesorado. Una clase magistral realizada correctamente no debe considerarse como una mera exposición de los conocimientos que el alumnado requiere, sino que debe seguir los mismos caminos que la investigación científica. Se debe seguir una línea deductiva que implique ofrecer al alumnado un espíritu crítico de la materia y un tiempo de reflexión sobre lo obtenido. Y así, esta clase magistral puede ser útil para:

1. Proporcionar en un tiempo breve información relevante, actualizada y organizada procedente de fuentes diversas y de difícil acceso para los alumnos.

2. Facilitar la comprensión de conceptos complejos que, de otra forma, llevaría demasiado tiempo asimilar por los alumnos.
3. Facilitar la aplicación de procedimientos.
4. Fomentar actitudes de acercamiento de los estudiantes hacia la disciplina.
5. Estimular la motivación hacia la materia a través de la actuación del profesor.
6. Proporcionar a los alumnos las claves de comprensión de los fundamentos sobre los que se asienta una disciplina.

Así, la clase magistral puede ser una buena herramienta de trabajo siempre que sigamos algunas pautas para hacerla más participativa magistral [6]:

- Dedicar suficiente tiempo a la preparación de cada clase.
- Establecer relaciones con los temas anteriores y posteriores dando así una visión integradora y global de la materia.
- Desarrollar el tema de forma amena resaltando los conceptos fundamentales, intercalando comentarios que dinamicen el discurso y compartiendo alguna experiencia personal que pueda resultar interesante para el alumno.
- Cuidar la oratoria, utilizando cambios de tono y toques de atención, con el objetivo de mantener un diálogo fluido con los alumnos.
- Animar a que los alumnos colaboren intercalando preguntas cortas, que puedan ser fácilmente deducidas o hagan referencia a conceptos explicados previamente
- Incentivar la duda como método de reflexión, aceptando preguntas u observaciones durante las explicaciones y reconociendo la utilidad de los conceptos que el alumno ya conoce. Las preguntas de interés general conviene contestarlas de inmediato, mientras que las de interés limitado, o más personalizadas, pueden dejarse para el final de la clase o para consultas particulares en tutorías.
- Resulta muy útil y eficaz combinar la clase magistral participativa con otras metodologías, como la resolución de problemas, el aprendizaje colaborativo, etc.

Resolución de ejercicios y problemas

En la resolución de ejercicios y problemas, los estudiantes trabajan con fórmulas y procedimientos relacionados con los conocimientos teóricos adquiridos, de forma que aprenden a aplicarlos, transformando la información recibida en soluciones de los problemas propuestos. Es una buena metodología complementaria de la lección magistral, tanto en

el aula como fuera de ella, para afianzar, contextualizar y aplicar los contenidos teóricos expuestos.

La selección de los ejercicios propuestos por parte del profesor debe ser cuidadosa, planteando problemas de dificultad creciente y relacionados con contenidos impartidos e intentando, dentro de lo posible, que los ejercicios estén relacionados con los intereses del alumnado, sean realistas y tengan relación con otras asignaturas del Grado.

Prácticas informáticas

Las prácticas informáticas se utilizan, en general, para afianzar conceptos de la materia trabajando con algún software que facilite la rápida visualización de muchos ejemplos y diferentes tipos de cálculos. Además, dado el interés que despiertan las TIC en el alumnado, las actividades informáticas suelen aumentar su interés y motivación hacia la asignatura.

Unas prácticas de laboratorio bien orientadas y planificadas son el complemento ideal de los contenidos teóricos, ya que proporcionan solidez y realidad al conocimiento adquirido, desarrollan la iniciativa y trabajan el pensamiento crítico a la hora de interpretar los resultados obtenidos.

Proyectos

El aprendizaje basado en proyectos consiste en trabajar problemas lo más realistas posibles, cuya resolución motive la introducción de los nuevos conocimientos que se quieren abordar. A nivel de conocimiento, el aprendizaje es más lento, aunque mucho más profundo y duradero. Con este enfoque, debemos plantear al alumno tareas que requieran la planificación, diseño y realización de actividades relacionadas con elementos ya trabajados en la asignatura, pero que necesiten avanzar un paso más para poder resolverlas.

Aunque resulta complicado utilizar únicamente este tipo de metodología en toda la asignatura, lo consideramos un complemento interesante al resto de actividades. La idea es proponer proyectos donde los alumnos trabajen de forma grupal fuera del aula, ya que su temática, más contextualizada y próxima a la actividad profesional, implica una mayor dedicación que la resolución de ejercicios y problemas.

A pesar de que este tipo de metodología supone, en general, una mayor dedicación del profesorado fuera de las horas de clase, suele ser muy motivadora para el alumno que valora positivamente la aplicación práctica de los contenidos teóricos. Además, el trabajo en competencias de este tipo de actividad es mucho mayor que con la clase magistral participativa o la resolución de ejercicios y problemas.

Trabajo en grupo

El aprendizaje colaborativo es una estrategia en la que el alumnado, dividido en pequeños grupos –por lo que habitualmente se denomina trabajo en grupo–, desarrolla una

actividad cuyo resultado depende de la cooperación de todos sus miembros.

Este tipo de actividad colaborativa puede ser una forma interesante de resolver ejercicios, tanto en las prácticas de aula, como en las prácticas informáticas, donde podemos plantear diversos tipos de estrategias que garanticen la colaboración real, como por ejemplo el puzzle de Aronson [7], donde la meta del trabajo es compartida y cada individuo alcanza su objetivo solo si sus compañeros también consiguen el suyo. Se trata de aprender a compartir, coordinarse, comunicarse, reforzarse, comprometerse, por lo que consideramos este método o herramienta una estrategia interesante, ya que con ella trabajamos varios tipos de competencias diferentes del alumnado.

Clase inversa

En términos generales, la metodología de clase inversa consiste en que los alumnos tengan su primer contacto con los conocimientos de forma autónoma, a través de materiales de calidad –apuntes, vídeos, narraciones digitales, referencias bibliográficas, etc.– proporcionados por el profesor, para que este no se centre únicamente en exponerlos en el aula, sino que pueda trabajar con ellos, fomentando así el aprendizaje activo y colaborativo en el aula [8].

Para aplicar este tipo de estrategia, debemos asegurarnos de resolver todas las dudas que hayan surgido mientras los alumnos preparaban el tema y, a continuación, plantear cuestiones y ejercicios donde se apliquen los conocimientos trabajados, para ver que han sido correctamente asimilados y así poder consolidarlos.

Esta metodología puede ser interesante para trabajar algunos temas de teoría, así como para preparar las sesiones de prácticas de laboratorio.

Todas estas actividades docentes, junto con muchas otras que podemos utilizar, se beneficiarán teniendo en cuenta los siguientes aspectos en nuestra clase:

- Crear un ambiente agradable en el aula
- Generar grupos flexibles
- Partir de las necesidades e intereses del alumnado Hacer comprensible la información
- Generar expectativas positivas para el alumno y su aprendizaje
- Estimular el pensamiento crítico y creativo
- Valorar y reforzar el esfuerzo
- Ofrecer retroalimentación del aprendizaje

Tutorías

Los profesores pertenecientes a los cuerpos docentes universitarios, de acuerdo con la ley vigente, deben disponer de un número de horas, acorde con su categoría y dedicación, para la atención de estudiantes en régimen de tutoría. Las tutorías, tanto las individuales como las colectivas, suponen una actividad complementaria que estrecha la relación entre el alumnado y el profesorado y que puede servir, para según qué casos, ayudar a equiparar el nivel de la clase.

Estas tutorías, fuera del horario de clase, implican que los estudiantes interactúan de forma más informal con el profesorado y permiten:

- Debatir de manera más personal, motivando e incentivando aquellos aspectos que puedan interesarles particularmente.
- Aportar una labor de apoyo y guía en los aspectos que atasquen su evolución: el simple hecho de poder resolver dudas concretas y particulares permitirá la adquisición de conocimientos de forma más rápida y efectiva.
- Realizar una labor de guía en la realización de problemas más avanzados o de introducción a la literatura científica permite ahondar en la materia por la que muestren mayor interés.
- Las tutorías sirven para observar qué temas o materias han quedado más confusos. Es un método de seguimiento, casi en tiempo real, del nivel de asimilación de las distintas clases por parte del alumnado. Así, el profesor podrá detectar a tiempo las deficiencias que puedan haberse producido en el aprendizaje.
- El carácter personal de la tutoría también sirve para asesorar al alumnado en temas no estrictamente circunscritos a la asignatura ni meramente académicos, como la posibilidad de participación en programas de generación espontánea, becas, cursos o estancias en otros centros, lo que supondrá un haber considerable en su posterior trayectoria profesional.

La pandemia por Covid-19 puso al descubierto la valiosa existencia de nuevas herramientas para realizar las tutorías de tal manera que las dudas se presentan, tratan y resuelven de forma más interactiva, ya que permiten compartir documentos, modificarlos y utilizar la pizarra virtual.

Enseñanza asistida por medios audiovisuales

La pandemia por Covid-19 nos ha resaltado la importancia del uso de las herramientas multimedia en los métodos de enseñanza- aprendizaje. Además, el hecho de que la mayoría del alumnado esté conectado a plataformas de distribución de contenidos nos abre una puerta para poder comunicarnos con ellos a través de esas plataformas de redes sociales.

Es una vía que no está suficientemente explorada por parte del profesorado, a pesar de que el alumnado está acostumbrado a consumir vídeos cortos para recibir información y adaptarse a esa forma de digerir la información, lo cual nos podría ayudar a mejorar la eficiencia de la transmisión del conocimiento. Por otra parte, la mayoría de las universidades cuentan con áreas de comunicación para ayudar al profesorado a crear contenidos, como grabaciones de video, montajes, presentaciones realización de investigador multimedia o conferencias en línea.

Esto no significa en absoluto querer fomentar el abuso de las herramientas multimedia, ya que si se fundamentara el desarrollo de un temario en el apoyo de los multimedia perdería la impronta de novedad y acabaría siendo tan contraproducente como llegar a hacer perder el interés del alumnado. Estas técnicas deben ser combinadas con el resto de estrategias presentadas anteriormente.

La herramienta multimedia más utilizada por el profesorado es la transparencia. Sin embargo, no es la única que se puede introducir en clase. Está claro que la presentación por diapositivas digitales ayuda en gran manera al alumnado a tener la clase más estructurada, así como a poder repasar en casa los conocimientos adquiridos, ya que las presentaciones se entregan al alumnado. También puede contarse con otros métodos multimedia, como la inserción de vídeos o el uso de simulaciones digitales, lo que hará la clase más amena y distendida. El vídeo se usará como factor disruptivo de la seriedad de la clase, mientras que la simulación digital es una herramienta perfecta para jugar con los efectos que puede tener la variación de las variables de una ecuación.

Querría hacer hincapié aquí en que este es un elemento atractivo con el que poder motivar de vez en cuando al alumnado por un período de tiempo corto, sobre todo cuando la materia resulta particularmente densa, como es el caso de esta asignatura.

A la hora de elegir las metodologías más adecuadas para desarrollar nuestra planificación docente, otra cuestión que debemos tener muy presente son los recursos didácticos de los que disponemos. Además de los más tradicionales como: pizarra, esquemas, diagramas y fuentes bibliográficas en general, no debemos olvidar que nuestros alumnos son nativos digitales y, por lo mismo, están habituados a utilizar estas herramientas en sus actividades de estudio, también en el aula, el ordenador, especialmente en las prácticas, las plataformas educativas que permiten interactuar entre ellos o bien con el profesor –compartiendo información, realizando tareas o exámenes, etc.– que, sin duda, ayudarán a captar su interés y motivación en las actividades que realicemos.

3.4. Actores del proceso de enseñanza-aprendizaje

Los principales actores del proceso formativo son, por un lado, el profesorado que imparte las asignaturas y, por el otro, el alumnado que las cursa. En esta sección, se desgana el contexto y circunstancias de cada uno de estos actores.

El alumnado

El primer paso para diseñar un contenido docente es controlar los conocimientos básicos que se requieren para acceder a la universidad, averiguar la procedencia de los miembros del alumnado y considerar que se asume que el alumnado debe conocer. El paradigma del nuevo modelo educativo planteado en el EEES deja de considerar al alumnado como sujeto pasivo y le asigna un papel activo en el proceso de su formación y en la de sus compañeros [9]. Esto libera la restricción de la formación circunscrita al aula y exige un nuevo tipo de esfuerzo tanto dentro como fuera de ella. La medición de dicho esfuerzo viene establecida por los ECTS.

Como se ha mencionado anteriormente, la educación del alumnado titulado debe conllevar una serie de objetivos globales que no hay que perder de vista. La preparación de ese potencial alumnado debe contener unas competencias generales que le permitan adaptarse a un entorno cambiante en el que la realización de tareas y la toma de decisiones serán las correspondientes a su estatus en la organización donde desarrolle su trabajo o investigación. Estas competencias van más allá de la obtención de los conocimientos específicos de una disciplina, ya que incluyen: (i) Obtención de conocimientos generales y académicos de las materias vinculadas a su futuro profesional. (ii) Obtención de habilidades y destrezas intelectuales, comunicativas, gestoras y de relaciones interpersonales. (iii) Obtención de actitudes y valores profesionales y personales.

El ciclo formativo que siga el alumnado debe contener todo el conjunto de competencias que requiera su perfil para el correcto desarrollo de su capacidad profesional, incluyendo siempre como elemento diferenciador las motivaciones e intereses personales que, considero, deben ser reforzados por el profesorado. Se debe poner el foco en qué se aprende y cómo se aprende, siendo este un proceso evolutivo en el que el cómo se aprende debe estar continuamente revisado por los resultados de las evaluaciones y la propia evolución de la motivación del grupo.

La motivación del alumnado, antes mencionada, puede tener dos vías, la motivación personal y la motivación grupal. La motivación personal es la relativa a potenciar los intereses del individuo, mientras que la grupal se interesa por la dinámica del grupo y la interacción de y entre el alumnado. La motivación individual tiene diversas variantes, desde el éxito personal y social, la adquisición de ciertos conocimientos que se ven proyectados en una aspiración futura, a la competitividad de cada cual. Respecto a la motivación grupal, diría que viene dada fundamentalmente por la acción activa del profesor. Una clase atractiva hace que la dinámica de grupo y la motivación por asistir a dicha asignatura aumente significativamente.

Como se deduce de las líneas anteriores, en este modelo de formación universitaria el alumnado es el protagonista central del proceso de enseñanza y aprendizaje, de manera que la universidad tiende a la formación, más allá de los contenidos, a un paradigma pro-

fesional y humanista.

Este proyecto docente está esencialmente considerado para la asignatura de “Física de Objetos Compactos y Procesos de Acreción”, de código 275461223, del Máster universitario en Astrofísica, correspondiente al plan de estudios del 2013 (publicado en 11-02-2014). El alumnado procede principalmente del bachillerato de Ciencias y Tecnología, en el que ha cursado una asignatura de Física y Química de 4 horas semanales, una de Física de 4 horas semanales y dos de Matemáticas. Adicionalmente, se ha cursado Mecánica, Electrotecnia y Tecnología I y II.

La revisión de los programas teóricos de las asignaturas de bachillerato indica que el alumnado debería acceder con conocimientos suficientes para abordar las que se proponen en este Proyecto Docente. Sin embargo, la experiencia nos dice que el alumnado tiene muchas carencias que perjudican el seguimiento de las asignaturas, especialmente en matemáticas.

Esta circunstancia nos obliga a repasar ciertas cuestiones de álgebra y trigonometría, así como a esbozar algunos conceptos de geometría y de cálculo diferencial, tal que se pondrá de manifiesto en la programación de la asignatura.

El profesorado universitario

La base de la comunicación fundamenta la existencia de un emisor y un receptor, que van intercambiando sus roles para transferir y compartir la información. En el método de enseñanza y aprendizaje que se realiza en el aula universitaria, tanto el alumnado como el profesorado deben realizar un proceso interactivo de emisión y recepción que permita que el intercambio de información entre ambos actores sea lo más eficiente posible. En el caso del alumnado, relativo a los conocimientos que están adquiriendo, y en del profesorado, más focalizado en la optimización del método para transmitirlos. Todo este proceso entierra la anterior concepción de docencia, en la que el profesorado era mero actor activo y emisor de los conocimientos, y el alumnado, el sujeto pasivo receptor de ellos. El alumnado tiene un papel mucho más activo y el profesorado lo tiene más de guía que de emisor de conocimientos.

Respecto a las características o cualidades que debe poseer un buen profesor universitario, existe mucha literatura, pero todos los modelos se basan esencialmente en unas propiedades básicas que son descritas, sin embargo, de forma diferente. Como las enumeradas por Hernández [10]:

1. Buena preparación
2. Interés por la materia
3. Carácter amigable, flexible, servicial y creativo

Las propuestas por Brown [11]:

1. Conocimiento en profundidad de la materia
2. Comunicación fluida con los alumnos
3. Conocimiento de los estilos de aprendizaje del alumno
4. Conocimiento de la didáctica universitaria

También podemos listar las propuestas por Ericksen [10]:

1. Selección y organización del material del curso
2. Guía a los estudiantes para el registro, integración y memorización de la información
3. Reconocida competencia en procedimientos y métodos de su disciplina
4. Sostén de la curiosidad intelectual de sus alumnos
5. Promoción del aprendizaje independiente

Todas estas guías se pueden resumir con cierta facilidad en lo que sería el modelo ideal del profesorado universitario, que debería reunir las siguientes características:

- (a) Ser especialista en el área de conocimiento en el que se enmarca la asignatura y haber realizado, o estando en ello, un trabajo de investigación en algún campo relacionado paralelamente con sus actividades docentes. Esto no solo repercute en un mayor conocimiento del área, lo que aporta precisión y rigurosidad a los conocimientos que se quieren trasladar, sino que sirve asimismo de motivación a los alumnos, que ven así reflejado en el profesor una especie de modelo aspiracional. Por otra parte, hay que destacar que los temas de investigación son voluntarios en el profesorado y, por lo tanto, la pasión del tiempo invertido en esa labor se traslada a la que pone en su manera de impartir sus conocimientos.
- (b) Tener habilidades comunicativas y personales. Es indiscutible que un profesor que conecta, empatiza y sabe hacer llegar el mensaje a sus alumnos va a tener mucho más éxito a la hora de transmitir los conocimientos. Otras cualidades como la flexibilidad, la paciencia y la motivación pueden lograr que una parte del alumnado no desconecte ya en primera instancia, como sucede en innumerables ocasiones.
- (c) La motivación del profesorado. En todos los cursos en los que he participado en tareas de enseñanza, he observado que palabras como experiencia, tradición y rutina son totalmente incompatibles con la buena docencia. La propia ULL es un ejemplo claro, ya que desde la inclusión de las personas que realizan tareas de colaboración en el plan de ordenación docente (POD), las estadísticas muestran que la docencia impartida por este personal suele estar estadísticamente mejor valorada por el alumnado. Ello indica que la motivación por dar la clase lo mejor posible es superior a la experiencia y aun a los abultados conocimientos.

- (d) El desarrollo del espíritu crítico del profesorado, es decir, la posesión de una actitud reflexiva y crítica con sus propias cualidades docentes, intentando evaluar la docencia propia y someterla a un exhaustivo escrutinio, redundará en la calidad de su enseñanza.
- (e) Al igual que en la faceta científica, en la docente, el profesorado debe “caminar a hombros de gigantes”, parafraseando la célebre frase de Newton. El profesorado, pues, debe aprovechar el conocimiento generado y la experiencia de otros docentes para el desarrollo de técnicas y de métodos didácticos aplicados a su propia enseñanza.
- (f) Dominio de las tecnologías. Si algo nos ha hecho ver la pandemia por Covid-19 es el hecho de la importancia del dominio de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en el desarrollo de la docencia. Así, el profesorado más experto en aplicar esas tecnologías a la docencia ha sido el menos afectado por la pandemia y el alumnado se ha beneficiado de ello.

Una vez conocidas las aptitudes y actitudes deseables en el profesorado universitario, también podemos señalar sus obligaciones en el marco del EEES. El profesorado debe tener competencias en [12]:

1. Diseñar la guía docente de acuerdo con las necesidades, el contexto y el perfil profesional, todo ello en coordinación con otros profesionales.
2. Desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje propiciando oportunidades de aprendizaje tanto individual como grupal.
3. Tutorizar el proceso de aprendizaje del alumno propiciando acciones que le permitan una mayor autonomía.
4. Evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje.
5. Contribuir activamente a la mejora de la docencia.
6. Participar activamente en la dinámica académico-organizativa de la institución (Universidad, Facultad, Área, Departamento, titulaciones...)

En resumen, el EEES no ha supuesto una pérdida del protagonismo activo del profesorado, sino que supone un incremento de la participación del alumnado.

3.5. Evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje

Evaluación del alumnado

La evaluación es quizás uno de los procesos más complejos de la planificación docente. No solo consiste en valorar los conocimientos del alumnado, sino que también se obtiene

una retroalimentación de la observación de si los métodos elegidos para transmitir esos conocimientos son eficaces o no. Por lo tanto, la evaluación valora tanto el aprendizaje por parte del alumnado como la enseñanza por parte del profesorado.

Desde el punto de vista del aprendizaje, la evaluación tiene como finalidad:

Estimular a aprender potenciando el estrés positivo en el alumnado. Así, la propia evaluación genera en el alumnado un estrés positivo temporal que debe usarse como herramienta de motivación para incitar al trabajo y a la asimilación del conocimiento. Se debe diferenciar claramente este estrés positivo del estrés negativo, porque mientras el primero es temporal y circunscrito a un momento concreto, el segundo es más alargado en el tiempo y conlleva la desmoralización del alumnado, la cual hay que perseguir.

Contribuir al proceso de aprendizaje. La realización de una prueba de evaluación le sirve al alumnado para conocer su lugar en la evolución de la asignatura, viendo si ha interiorizado los conocimientos que se le han transmitido y como prueba de si el proceso que ha seguido para llegar a la evaluación es válido o necesita cambiar de estrategia.

Desde el punto de vista de la enseñanza, la evaluación tiene como fin:

Señalar el nivel del alumnado. La evaluación nos permite verificar el nivel de conocimiento medio de la clase y detectar deficiencias en su formación. Así, por ejemplo, si vemos que gran parte del alumnado falla en derivadas, significará que ha habido un error previo en su formación que nosotros podemos solventar.

Informar al profesorado sobre la validez de los métodos de enseñanza utilizados. La evaluación es el mejor método para evaluar la efectividad de los métodos de enseñanza que se han utilizado para transmitir los conocimientos. Nos permite, pues, modificar esos métodos antes de que sea tarde y no podamos alcanzar los objetivos de la asignatura en el contexto del grado.

Corroborar la consecución de los objetivos propuestos. Lo que sería la concepción clásica de la evaluación docente como baremación de los conocimientos adquiridos por el alumnado. Esta evaluación es importante ya que la asignatura debe alcanzar unos objetivos para que no se vean lastrados en posteriores cursos o asignaturas.

Analizar las causas que hayan creado deficiencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Más centrado en el profesorado, podemos detectar qué temas o temáticas han presentado mayor dificultad para el alumnado y, por lo tanto, instarnos a cambiar los métodos de enseñanza en posteriores años para incrementar la eficacia del proceso enseñanza-aprendizaje.

Cuando el alumnado aprende, el conocimiento que adquiere se puede dividir en dos partes: productivo y reproductivo. Mientras que el reproductivo es el que permite al alumnado repetir la información, técnicas y métodos que se han enseñado en el aula, el productivo está más centrado en la asimilación de los conceptos para poder aplicarlos en contextos diferentes, siendo capaz de generar nuevos conocimientos, metodologías o técnicas. El conocimiento reproductivo debe constituir el fundamento del conocimiento productivo, pero debemos evaluar en el alumnado su capacidad de generar conocimiento productivo, que será el que más se le valore en su salida al mundo laboral o académico.

A continuación, describimos algunos tipos de pruebas o actos de evaluación que pueden ayudarnos en este proceso.

Prueba escrita

Existen diversas variantes de este tipo de acto de evaluación: pruebas de respuesta abierta, pruebas tipo test –de selección única o de opción múltiple– o pruebas de problemas, entre otras.

Las cuestiones breves y las pruebas tipo test son adecuadas para evaluar el conocimiento de terminología, de conceptos, principios y generalizaciones, mientras que los exámenes de problemas facilitan evaluar la capacidad de razonamiento y la habilidad para expresar el conocimiento en forma de formulación, desarrollos matemáticos y comprobación e interpretación del resultado.

Consideramos que una prueba escrita fiable debería incluir cuestiones de todos estos tipos, para así poder realizar una evaluación más completa.

Prueba oral

Este tipo de prueba permite valorar aspectos complementarios a las pruebas escritas, como las estrategias en la resolución de problemas, el uso fluído del lenguaje específico de la materia, las habilidades para la comunicación o la capacidad de intervenir en discusiones de grupo. Aunque, con ratios elevadas en el aula, es complicado realizarla por el tiempo y la atención que requiere. Además, presentan inconvenientes claros, como la timidez de los alumnos a la hora de hablar en público o por la complejidad de la evaluación. De todos modos, consideramos las pruebas orales como un instrumento más y muy interesante en algunos entornos; así, la exposición y discusión de trabajos propuestos ante el resto de compañeros.

Proyectos

Esta forma de evaluar consiste en plantear al alumno uno o varios proyectos de forma individual o en grupo. Este método favorece que el alumno se familiarice con la bibliografía de la materia y le permite profundizar en el conocimiento de un tema concreto, además

de estimular su capacidad de análisis y síntesis al elaborar las conclusiones. Conviene valorar, además de la memoria en sí, la validez y originalidad del procedimiento utilizado y la interpretación de los resultados.

En el caso de una realización grupal, es importante tratar de medir la aportación de cada miembro, aunque en ocasiones resulte una labor complicada. Nos parece un método complementario interesante, aunque no para utilizarlo de forma exclusiva, especialmente en las asignaturas de los primeros cursos.

Observación

Este tipo de evaluación consiste en la recogida sistemática de datos durante la clase presencial y resulta muy útil en la evaluación continua como complemento al resto de pruebas de evaluación.

Los datos recogidos en cada sesión no solo completan la información personalizada sobre cada alumno, sino que permiten tener una visión global de cómo evoluciona la clase en su conjunto.

Para realizar una evaluación de este tipo es importante tener bien definido lo que pretendemos observar. Algunos aspectos que consideramos evaluables con esta metodología son, por ejemplo, la asistencia a clase, la predisposición y actitud en las realización de las tareas propuestas, la asimilación del lenguaje, conceptos y métodos presentados o la cooperación con el resto de compañeros.

Otro aspecto que debemos analizar, a la hora de plantearnos la evaluación en nuestro programa docente, es el número de pruebas y la temporización de estas dentro del curso. Aunque en ocasiones la evaluación se reduce a un único tipo de prueba al finalizar el curso, con la adhesión al EEES, la evaluación continua y formativa ha ganado terreno y actualmente es la más común en la mayoría de las asignaturas.

La *evaluación continua* se caracteriza por constar de diversos actos de evaluación secuenciados a lo largo de toda la actividad docente. De esta manera, los alumnos realizan un trabajo más regular y distribuido a lo largo del curso, en lugar de concentrado en unos cuantos días previos al examen final. Además, con este tipo de evaluación, los alumnos reciben retroalimentación sobre sus progresos y dificultades con tiempo suficiente para reaccionar y mejorar así su desempeño. Por esta razón nos parece muy recomendable contar, dentro de este proceso, con una *evaluación inicial* que favorezca el diagnóstico realista de los conocimientos previos en la materia, para que tanto el profesor como los alumnos sean muy conscientes del punto de partida en el que se encuentran.

Sea cual sea el sistema de evaluación escogido, debemos tener en cuenta los siguiente aspectos:

- Atender a los objetivos de la asignatura.
- Aplicar un procedimiento de evaluación que considere la adquisición de conocimien-

tos, el razonamiento y la capacidad de análisis y síntesis de los aspectos relacionados con la materia.

- Interpretar los datos recogidos en dicho procedimiento, con criterios claros que, en general, estarán fijados a priori.
- Tomar una decisión, en función de la interpretación estipulada, que pueda ser justificada de forma objetiva.

Una evaluación, razonada y bien justificada por el docente, debe ayudar al alumno a entender el valor de su trabajo según criterios externos y también comparado con el desempeño del resto de sus compañeros, de manera que sea capaz de autoevaluarse y también de evaluar a otros. Por ello, consideramos que la *autoevaluación* y la *evaluación por pares* –también llamada coevaluación– son herramientas que podemos utilizar para dotar a la evaluación de un aspecto formativo, más allá de la mera calificación de la materia. Esta debe tener ciertas características inherentes que no son negociables, como:

Evaluación fiable. Evaluación coherente con el nivel y los conocimientos tratados en las clases.

Evaluación válida. Evaluación que analice realmente el nivel de los conocimientos adquiridos, evitando preguntas sobre aspectos no tratados.

Evaluación representativa. Evaluación representativa de la totalidad del programa de la asignatura, no centrándose únicamente en una parte sino abarcando sus distintas partes.

Evaluación del profesorado

Dentro de las funciones cotidianas del profesorado se incluyen la docencia, la investigación y la gestión. Cada una de estas funciones debe ser evaluada teniendo en cuenta los distintos factores que repercuten en ella: recursos disponibles (materiales, humanos), organización (del centro, del departamento), factores sociales (tales como el grado de aceptación de los estudios en los que imparte la enseñanza o la repercusión de la investigación que realiza). En este apartado, nos centraremos en la función docente y su evaluación.

El profesorado debe reflexionar sobre la actividad docente que está realizando, valorando los siguientes aspectos:

- El cumplimiento de los objetivos previstos en la guía docente, así como la consecución de la programación de la asignatura.
- Flexibilidad para cambiar la metodología aplicada a los distintos objetivos de la asignatura.

- Efectividad del proceso enseñanza-aprendizaje.

Como indicadores se pueden usar las calificaciones promedio obtenidas por el alumnado y de forma más específica la evolución de la evaluación personal. Este proceso de valoración no debe circunscribirse al profesorado, sino que el alumnado y las personas responsables de la educación también deben participar de él. Así, las encuestas de profesorado, como medida objetiva e independiente de la propia opinión personal del profesorado, puede resultar una herramienta muy útil en la valoración de la eficacia de la labor docente. No es un sistema perfecto, ya que influyen muchos aspectos en ella, pero puede servir como referencia para observar la percepción general que tiene el alumnado del profesorado de la asignatura.

3.6. La innovación educativa como proceso de mejora

La educación está sujeta a cambios y, como tal, se podría poner en cuestión la posibilidad de implementar algunos de estos objetivos.

- (a) Promover el desarrollo de proyectos dirigidos de forma clara y directa a la mejora del aprendizaje y desarrollo integral de los estudiantes, fomentando un aprendizaje profundo, el desarrollo de habilidades cognitivas de alto nivel y la transferencia del conocimiento a la vida real y profesional.
- (b) Poner en valor el trabajo cooperativo en la innovación educativa, dando cabida a proyectos desarrollados por equipos e incrementando la implicación del equipo directivo de los centros.
- (c) Proporcionar apoyo y reconocimiento institucional a aquellos equipos de profesores que quieran iniciar y/o continuar procesos de innovación e investigación educativa.
- (d) Apoyar el desarrollo de proyectos que avancen en una docencia profesionalizada y académica, basada en la experimentación de su enseñanza y en un análisis sistemático de las evidencias del aprendizaje de sus estudiantes, sometiendo dichos resultados a la revisión crítica por parte de todos los miembros de la comunidad universitaria.

3.7. Evaluación del alumnado de máster

En el marco del Máster en Astrofísica de la Universidad de La Laguna, la evaluación del rendimiento académico se estructura bajo un sistema flexible y adaptado a las necesidades

del alumnado. Este enfoque garantiza que los estudiantes puedan demostrar sus conocimientos y competencias de manera equilibrada, evitando que una única prueba determine su calificación final.

Opciones de evaluación

El programa ofrece dos modalidades de evaluación, entre las cuales los estudiantes pueden elegir según sus preferencias o circunstancias personales:

- Evaluación continua: Permite un seguimiento progresivo del aprendizaje mediante actividades distribuidas a lo largo del curso.
- Evaluación final: Diseñada para quienes prefieran concentrar su esfuerzo en pruebas concretas al término del periodo lectivo.

Un aspecto destacable es la flexibilidad del sistema, que permite a los alumnos cambiar de modalidad durante el transcurso del año académico, siempre que lo comuniquen debidamente y dentro de los plazos establecidos.

Requisitos generales de evaluación

Para garantizar una valoración justa y representativa, se establecen los siguientes criterios:

- Mínimo de dos pruebas evaluativas.
- Ninguna prueba individual puede superar el 50 % de la nota final.

Ejemplos de distribución de la evaluación

La ponderación de las calificaciones puede estructurarse de diversas formas, según las características de cada asignatura. Algunos ejemplos comunes incluyen:

- Varios exámenes parciales a lo largo del curso.
- Combinación de:
 - Examen final (con un peso máximo del 50 %)
 - Ejercicios numéricos o problemas prácticos
 - Presentaciones en pizarra con evaluación por parte del profesorado

Este sistema de evaluación busca fomentar un aprendizaje constante y evitar la acumulación de materia en periodos puntuales, al tiempo que proporciona múltiples oportunidades para demostrar las capacidades adquiridas durante el máster.

3.8. Un ejemplo de evaluación

A continuación se presenta un ejemplo concreto de sistema de evaluación propuesto para una asignatura del Máster en Astrofísica de la Universidad de La Laguna. Este modelo ilustra cómo pueden combinarse diferentes tipos de actividades evaluables para valorar de forma integral los conocimientos y competencias adquiridos por el alumnado.

El modelo de evaluación tiene **carácter meramente ilustrativo**, con el objetivo de ejemplificar posibles modalidades de evaluación continua y final. Cabe destacar que cualquier implementación concreta estará sujeta a las siguientes consideraciones fundamentales:

Adecuación al volumen de créditos: La estructura evaluativa definitiva respetará escrupulosamente la carga de trabajo correspondiente a los 3 ECTS asignados a la asignatura, equivalentes a aproximadamente 30 horas totales de dedicación estudiantil (27 horas lectivas + 3 horas de evaluación).

Optimización de recursos: El diseño final de actividades evaluativas garantizará una distribución equilibrada que:

- Evite la saturación académica
- Mantenga coherencia con los resultados de aprendizaje previstos
- Respete los estándares de calidad educativa

Flexibilidad operativa: Las modalidades de evaluación mencionadas (evaluación continua o pruebas parciales) constituyen opciones metodológicas que serán validadas mediante análisis de viabilidad temporal y de recursos antes de su implementación.

El sistema propuesto se caracteriza por su enfoque multidimensional, incorporando tanto evaluaciones teóricas como prácticas, con componentes individuales y ejercicios de aplicación directa de los conceptos aprendidos. Se estructura en siete bloques principales.

1. Una presentación oral donde los estudiantes analizan las órbitas de partículas de prueba en torno a un agujero negro de Schwarzschild, demostrando su capacidad para comunicar conceptos complejos de relatividad general.
2. Dos entregables teóricos que abordan problemas fundamentales de astrofísica relativista: el estudio de estrellas de neutrones en equilibrio y la investigación sobre el límite de Chandrasekhar en enanas blancas. Estos trabajos permiten evaluar la comprensión profunda de los conceptos teóricos.
3. Un entregable computacional centrado en la simulación de discos de acreción, donde se valora tanto la implementación técnica como el análisis físico de los resultados obtenidos.

4. Sesiones de resolución de problemas en pizarra, que miden la capacidad de aplicar los conocimientos a situaciones concretas y resolver ecuaciones complejas en tiempo real.
5. Un examen final escrito que sintetiza todos los contenidos del curso, garantizando una visión global de los aprendizajes.
6. Un requisito mínimo de 4/10 en el examen final para superar la asignatura, que asegura el dominio de los conceptos básicos.

Este modelo evaluativo busca equilibrar diferentes formatos de evaluación (orales, escritos, prácticos) y tipos de habilidades (teóricas, computacionales, comunicativas). La ponderación está diseñada para que el examen final, aunque significativo (50 %), no sea el único determinante, combinándose con evaluaciones continuas que permiten un seguimiento más detallado del progreso académico. Además, el sistema incorpora salvaguardas (como el requisito mínimo en el examen) para garantizar que los estudiantes demuestren competencia en todos los aspectos fundamentales de la asignatura.

- **Presentación oral:** Análisis simplificado de la órbita de una partícula de prueba alrededor de un agujero negro de Schwarzschild (5 % de la nota final). Los estudiantes deberán preparar una exposición de 15-20 minutos donde analicen, mediante las ecuaciones geodésicas, las trayectorias posibles para una partícula en este espacio-tiempo curvo. Se valorará la claridad expositiva, el rigor matemático y la interpretación física de los resultados.
- **Entregable teórico:** Estudio sobre soluciones de equilibrio para estrellas de neutrones (5 % de la nota final). Consistirá en un informe de 5-8 páginas donde se discutan las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff y sus soluciones numéricas para diferentes ecuaciones de estado. Deberá incluir una discusión sobre la masa máxima posible para estos objetos compactos.
- **Entregable computacional:** Generación de curvas de luz sintéticas en rayos X de un disco de acreción usando Gadget-SPH (15 % de la nota final). Los alumnos implementarán una simulación hidrodinámica sencilla y extraerán las curvas de luz resultantes, analizando su dependencia con parámetros como la viscosidad del disco o la masa del objeto central. El entregable incluirá el código utilizado y un análisis de los resultados.
- **Entregable teórico-computacional:** Investigación sobre el límite de Chandrasekhar y el misterio de las enanas blancas supermasivas usando MESA (15 % de la nota final). Mediante el paquete MESA, los estudiantes explorarán modelos de enanas blancas cerca del límite de masa crítica, investigando posibles mecanismos que podrían

explicar observaciones de enanas blancas supermasivas. El trabajo incluirá tanto desarrollo teórico como resultados numéricos.

- **Resolución de problemas en pizarra:** Ejercicios sobre estructura de objetos compactos o procesos de acreción (5 % cada uno). Estas sesiones evaluarán la capacidad del alumno para resolver problemas analíticos en tiempo real, demostrando comprensión conceptual y habilidad matemática. Cada estudiante resolverá al menos dos problemas durante el curso.
- **Examen final escrito:** (50 % de la nota final). Prueba comprensiva que cubrirá todos los temas del curso, con énfasis en la resolución de problemas teóricos y la interpretación física de los conceptos. Incluirá tanto cuestiones conceptuales como desarrollos matemáticos.
- **Requisito mínimo:** Para superar la asignatura será necesario obtener al menos 4/10 en el examen final, independientemente de las notas obtenidas en el resto de componentes. Este requisito asegura un conocimiento mínimo de los conceptos fundamentales de la asignatura.

Este sistema de evaluación combina diferentes habilidades (teóricas, computacionales y expositivas) mientras mantiene un equilibrio entre trabajo continuo y examen final. La ponderación garantiza que ningún componente individual sea determinante, excepto el examen final que, aunque con un peso importante, no puede compensarse completamente con otras actividades.

Bloque 2. Programa Docente de la asignatura

CAPÍTULO

4

ELEMENTOS BÁSICOS DE LA ASIGNATURA

En este primer capítulo, relacionado propiamente con la propuesta docente, se exponen los elementos básicos del Programa Docente de la asignatura “Física de Objetos Compactos y Procesos de Acreción”, del Máster Universitario en Astrofísica. Esta asignatura tiene carácter optativo, se imparte en el segundo cuatrimestre del primer curso y consta de 3 créditos ECTS. Para esta presentación se tomarán como referencia los elementos básicos que aparecen presentados de forma genérica en la Guía Docente de la asignatura. En este sentido, en primer lugar, se presentarán las competencias de la asignatura. Después se mostrará el epígrafe de contenidos. A continuación, se expondrá la metodología docente aplicada en esta asignatura. Por último, se ofrecerá la propuesta de evaluación, planteada con el objetivo de asegurar el desarrollo de las competencias por parte del alumnado.

4.1. Competencias

En la Guía Docente de la asignatura, aparecen las siguientes competencias según el número que corresponden dentro del plan de estudios del Máster Universitario en Astrofísica.

■ Competencias específicas (CE):

- **CE1.** Comprensión profunda de los esquemas conceptuales fundamentales en astrofísica, incluyendo los principios físicos que gobiernan los fenómenos celestes y su modelización teórica. Esta competencia permite al estudiante interpretar correctamente los procesos astrofísicos desde una perspectiva física.
- **CE6.** Dominio de los procesos de interacción materia-radiación en diferentes regímenes energéticos, desde el espectro electromagnético hasta las altas energías. Incluye el estudio de mecanismos de emisión, absorción y dispersión en diversos entornos astrofísicos.
- **CE7.** Desarrollo de habilidades investigadoras para abordar problemas astrofísicos con autonomía, utilizando literatura científica especializada y recursos bibliográficos avanzados. Esta competencia fomenta la capacidad de aprendizaje autodirigido.
- **CE10.** Manejo competente de instrumentación científica actualizada y tecnologías innovadoras en astrofísica, incluyendo telescopios, detectores y sistemas de adquisición de datos.

■ Competencias generales (CG):

- **CG1.** Aplicación de herramientas matemáticas y métodos numéricos avanzados para modelizar y resolver problemas complejos en física y astrofísica. Incluye técnicas de aproximación y simplificación de sistemas físicos reales.
- **CG2.** Comprensión integral de las tecnologías de observación astronómica, desde los principios físicos de los instrumentos hasta su aplicación en investigación astrofísica.
- **CG4.** Habilidad para realizar estimaciones de órdenes de magnitud, identificar analogías físicas y transferir soluciones conocidas a nuevos contextos problemáticos.

■ Competencias básicas (CB):

- **CB6.** Adquisición de conocimientos avanzados que permitan la innovación en investigación astrofísica, tanto en el desarrollo teórico como en la aplicación práctica de nuevas ideas.
- **CB7.** Capacidad para enfrentar problemas en contextos novedosos, integrando y aplicando conocimientos multidisciplinarios de manera efectiva.
- **CB8.** Habilidad para analizar situaciones con información limitada, tomar decisiones fundamentadas y asumir las responsabilidades éticas y sociales derivadas de la aplicación del conocimiento científico.

- **CB10.** Desarrollo de estrategias de autoaprendizaje que permitan mantener una formación continua y autónoma a lo largo de la carrera profesional.

■ **Competencias exclusivas de la especialidad de Teoría y Computación (CX):**

- **CX4.** Comprensión detallada de los procesos físicos que gobiernan los objetos compactos (agujeros negros, estrellas de neutrones) y los discos de acreción, incluyendo su modelización teórica y simulaciones computacionales.

Este conjunto de competencias forma un marco integral que prepara a los estudiantes del Máster en Astrofísica de la Universidad de La Laguna para desarrollar una carrera profesional exitosa tanto en investigación académica como en aplicaciones tecnológicas avanzadas. La estructura combina conocimientos teóricos profundos con habilidades prácticas, fomentando un perfil profesional versátil y adaptado a los retos actuales de la astrofísica.

4.2. Contenidos

Tal y como establece la Guía Docente, los contenidos de la asignatura “Física de Objetos Compactos y Procesos de Acreción” se distribuyen en dos módulos. El primer módulo, está dedicado a la física de los objetos compactos e incluye tres temas: enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros. El segundo módulo, centrado en los distintos procesos de acreción, se desarrolla a lo largo de cuatro temas: conceptos básicos de la acreción, discos de acreción finos, otras estructuras de acreción y acreción en sistemas binarios. Por lo tanto, esta asignatura se desarrolla a lo largo de siete unidades temáticas.

Sin embargo, como explico en el capítulo 5, el temario es muy amplio y, a mi parecer, una posible redistribución de las materias sería empezar de forma detallada con la física de los agujeros negros, haciendo un resumen inicial de los conceptos matemáticos más importantes, para seguir con las estrellas de neutrones y las enanas blancas. Es decir, empezar por el régimen de gravedad más fuerte para acabar en el menos relativista. Por otra parte, se puede ir intercalando de forma natural los conceptos de acreción a medida que se expliquen los objetos compactos para, luego, ir en más detalle en el segundo módulo, el de acreción. La consecuencia es que este segundo, en principio, parece reducirse, pero esto no es así. Es natural relacionar la física de los objetos compactos con los procesos astrofísicos de acreción relacionados con estos objetos, para que el alumnado haga la conexión.

En el diseño del temario para esta asignatura, se han realizado ciertos ajustes pedagógicos para garantizar un aprendizaje óptimo dentro de los límites temporales disponibles. Cabe señalar que, aunque el programa inicial incluía el estudio de las ondas gravitacionales como uno de sus contenidos, actualmente la universidad está preparando una asignatura específica dedicada exclusivamente a este importante tema dentro del Máster en Astrofísica. Dada la profundidad que requiere este campo de estudio y para evitar solapamientos o

tratamientos superficiales, se ha considerado más adecuado posponer su estudio completo para cuando dicha asignatura entre en funcionamiento. Esta decisión permite centrar los esfuerzos en otros contenidos fundamentales que no tendrán un espacio propio en el plan de estudios.

El temario propuesto en esta guía docente ha sido elaborado con una amplitud considerable, abarcando numerosos aspectos clave de la astrofísica contemporánea. Sin embargo, somos plenamente conscientes de que su extensión total podría resultar excesiva para el tiempo lectivo disponible. Por ello, se aplicará un enfoque flexible y realista, priorizando siempre la calidad y profundidad del aprendizaje sobre la mera cobertura de contenidos. A medida que avance el curso, se irán evaluando las necesidades del grupo y el ritmo de aprendizaje, lo que permitirá realizar ajustes oportunos en el programa. Este planteamiento dinámico asegura así una asimilación significativa de los conceptos fundamentales. La adaptabilidad del programa garantiza que, aunque partamos de una base amplia, el resultado final será un temario ajustado a las posibilidades reales, donde cada tema tratado reciba la atención y el tiempo que merece.

En el siguiente capítulo se desarrollarán de forma más pormenorizada los contenidos.

4.3. Metodología

Los contenidos presentados anteriormente se trabajarán de diversas maneras. En la Guía Docente de la asignatura se establecen tres metodologías instruccionales básicas orientadas a potenciar el aprendizaje significativo de los conocimientos (factuales, conceptuales, procedimentales y metacognitivos) implicados y el desarrollo de las competencias propias de la materia. Estas son: 1) Clases de teoría; 2) Clases prácticas y 3) Realización de trabajos individuales y grupales.

En la presente propuesta docente se han incluido otras metodologías que creemos pueden complementar y enriquecer las señaladas en la Guía Docente. De este modo, las clases de teoría se combinarán principalmente con la resolución de problemas y las experiencias de aula. Asimismo, además del desarrollo de clases prácticas, y el planteamiento de proyectos de carácter grupal e individual, teniendo en cuenta que se trata de alumnado de máster y aprovechando la situación de la ULL, también se organizarán seminarios y visitas a centros de investigación, como el Instituto Astrofísico de Canarias.

Clases de teoría

La clase de teoría ha sido generalmente asociada a la clase magistral, que, a pesar de que, en efecto, no es la única manera de darla, sí puede resultar una pieza extraordinariamente importante.

Como se ha expuesto ya en el capítulo 3, este método puede tener sus ventajas y desventajas. En nuestro caso, la estructura de la clase magistral, constará de tres fases distintas:

Introducción. Se introduce el tema de la materia que se va a tratar, se destaca su importancia en la disciplina y se establece relaciones con otros temas ya conocidos por los alumnos. Para hacer esta parte más amena, se puede relacionar la materia a tratar con problemas que se vayan a encontrar en su futuro profesional, con competencias laborales que tendrán, o incluso con alguno de los hobbies más extendidos. Además, esta introducción debe tener un índice bien claro que permita al alumnado saber en qué bloque está y como va evolucionando en la temática. En definitiva, introducir el tema que se va a abordar de una manera clara, interesante, estructurada y motivacional.

Desarrollo. Esta es la fase central de la exposición en la que la misión del profesor es conseguir un aprendizaje significativo en el alumnado a través de la conexión de conceptos ya adquiridos con conocimientos nuevos de manera estructurada, intentando en todo momento que las explicaciones claras, concisas y conceptuales sean las que predominen por encima de las demostraciones extensas. Es en esta parte donde más valiosa es la aportación del profesorado, donde debe exhibir el dominio del tema tratado y trasladar al alumnado la absoluta seguridad en lo que quiere comunicar. A su vez, la motivación y el entusiasmo deben ser esenciales, ya que, si se realiza la tarea desgana o maquinalmente, estos sentimientos son trasladados de inmediato al alumnado.

Cierre. Esta parte se concentra en los últimos cinco o diez minutos de la exposición y es donde debe hacerse un resumen de todo lo visto, relacionando los conceptos de forma clara, abriendo nuevos interrogantes que se resolverán en posteriores clases o ligando los nuevos conocimientos con otros de la misma materia.

La clase magistral aquí expuesta tiene una supuesta variante, la lección interrogada, que incita a la participación del alumnado en general. Sin embargo, podría afirmarse que la lección interrogada no pasar de ser una manera de hacer amena la clase magistral.

¿Es esta la única manera de dar una clase teórica? Por supuesto que no. Existen muchos otros métodos; por ejemplo, la clase inversa, como se ha presentado en el capítulo 3. Aquí, la responsabilidad de lo que se aprende ya no radica en el profesorado, sino que ahora es el alumnado el encargado de realizar el mayor esfuerzo. Con esta técnica, el alumno tiene a su disposición una serie de herramientas para poder considerarse autosuficiente y llegar por sí mismo a los conocimientos requeridos, mientras que el profesor solo debe hacer el esfuerzo de proporcionar las herramientas y de resolver las dudas surgidas en el alumnado. Así, es el alumnado quien marca su propio ritmo de aprendizaje y el profesor se limita a una función asistencial o de guía.

En la asignatura que presento y que forman parte del perfil del curso baso la mayoría de las clases de teoría en la lección magistral. Si bien se podrán combinar con otras metodologías, como la resolución de problemas.

Resolución de ejercicios y problemas

Según el diccionario de María Moliner, un problema es una

"Cuestión en que hay algo que averiguar o alguna dificultad (...) Particularmente, en matemáticas u otra ciencia, cuestión de la que se conocen algunos datos, los cuales hay que manejar convenientemente para encontrar otro que se busca."

La etimología de esta palabra se encuentra, cómo no, en el griego clásico, concretamente en $\pi\rho\acute{o}s + \beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\omega$. Es decir, "arrojo hacia", "lanzo hacia".

Más concretamente, en nuestro caso, el problema es un enunciado explícito que aporta información, a través de la cual se pueden plantear cuestiones que lleven a un resultado o a un razonamiento. La resolución de estos facilita la comprensión y aplicación de una ley o teoría, con lo que es muy útil para aclarar ideas a los estudiantes y comprobar su nivel de comprensión de la asignatura.

En asignaturas como la de este proyecto docente, la clase de problemas es una herramienta de gran utilidad ya que, generalmente, al alumnado le resulta muy complicada la introducción de la teoría de cada tema y necesita ver su aplicación para ser capaz de valorar la importancia de las ecuaciones que previamente se le han presentado. Por otra parte, y como contraste con lo anterior, la mera clase de problemas corre el riesgo de convertirse en una simple proyección de la clase de teoría, lo que suele generar tedio en el alumnado, que tiende a memorizar las soluciones en lugar de entender la metodología y aplicación de la teoría a la resolución de los problemas. Para evitar esta situación, normalmente se aplica la siguiente metodología:

- (a) El alumnado recibe una colección de problemas al inicio del curso con la solución final de cada problema. De esta forma, se le facilita una herramienta que permite la autoevaluación de los conocimientos y una guía de la implicación de la clase en la asignatura.
- (b) Parte de los problemas de la colección son resueltos en clase. En esencia, serán aquellos que tengan una aplicación más inmediata de la teoría. Dicha resolución se hará al final de la explicación de la teoría a la que conciernen, para así asentar los conocimientos que se hayan explicado y que permita al alumno observar una aplicación directa de las fórmulas matemáticas adquiridas.

- (c) Otros problemas de la colección, aquellos que resulten más problemáticos, serán resueltos también en clase, conjuntamente con el alumnado. En este caso, el propio alumnado puede seleccionar aquellos que le resulten más difíciles de resolver, lo que implicará una mayor comunicación e interacción con el profesor o profesora.

Estos problemas deben estar muy bien estructurados para que podamos guiarlos en el proceso de resolución de problemas, distinguiendo entre:

Planteamiento. El alumnado debe entender que es lo que se le pregunta, distinguiendo entre los datos aportados y las incógnitas que deben despejar.

Discusión. El alumnado aplica los principios aprendidos en teoría para diseñar el camino que lo conduzca a la resolución del problema, siempre reconociendo que este camino no es único y que se puede llegar a un resultado correcto por distintos caminos.

Resolución matemática. El alumnado deberá aprender la resolución simbólica del problema, tratando de obtener una forma algebraica general que le permita resolver el problema independientemente de los datos aportados.

Discusión del resultado. Parte fundamental del conocimiento científico es aplicar la lógica a la solución obtenida para saber si es un valor realista. Así, se pueden verificar las dimensiones y unidades de las expresiones obtenidas, así como la dirección y sentido de las expresiones vectoriales obtenidas. De esta forma, se intenta que los alumnos reflexionen sobre el resultado para que pueda autoevaluarse y discernir si esa solución es aceptable o no.

Este tipo de clase, en virtud de lo explicado anteriormente, pone de manifiesto el conocimiento de la materia por los alumnos y, además, puede aportarles luz en la comprensión de ciertos aspectos de la materia que se le venían resistiendo.

Las experiencias de aula, o como se han llamado tradicionalmente las experiencias de cátedra, son pequeñas demostraciones experimentales llevadas a cabo para ilustrar mejor una teoría. Estas demostraciones no tienen toma de datos ni tratamiento de los mismos, sino que son mera exposición divulgativa de las ideas o del fenómeno que fueron explicados con anterioridad.

Estas experiencias no deben ser diseñadas para sustituir las prácticas, sino para motivar al alumnado, crear interés respecto al tema tratado y resolver pequeñas paradojas a las que pudiera dar lugar la teoría. Además, se produce una mayor interacción entre profesorado y alumnado, lo que provoca que la clase sea más participativa y exista una discusión entre unos y otros. Hay grandes ventajas en su uso, como:

Su carácter experimental, que refuerza el concepto de que la astrofísica describe fenómenos naturales y da realismo a las fórmulas matemáticas.

La comprensión de conceptos astrofísicos complejos, ya que la experimentación permite identificar causas y efectos con teorías físicas.

La aplicación del método inductivo, en el que pasamos de un caso particular a uno más general.

La demostración inmediata de la teoría expuesta en clase. Es decir, no hay desfase de varios días o semanas, como ocurre entre la deducción de las leyes y su demostración en las posibles prácticas o proyectos.

Clases prácticas y realización de proyectos

En el apartado anterior, hemos señalado las ventajas que supone la puesta en práctica de los conceptos teóricos o el desarrollo de un proyecto. Cabe recalcar aquí que la realización de uno o más proyectos estará supeditada al progreso que se haga con las clases de teoría y los ejercicios. Aunque no esté completamente claro que se puedan llegar a realizar, en este apartado explicamos por qué sería interesante.

Las prácticas y proyectos desempeñan un papel importante en la formación de astrofísicos. La aplicación correcta de la teoría en las prácticas, la concepción de un proyecto práctico basado en la teoría y la familiarización con el cálculo de errores son conceptos básicos para un estudiante que quiera convertirse en astrofísico y realizar investigación de calidad.

Entre los conocimientos adicionales adquiridos, está también el de hacerse con las etapas del método científico, de entre las cuales, las prácticas se centran fundamentalmente en la observación, en el análisis y clasificación de datos, en la evaluación de los resultados obtenidos y en la comparación con las predicciones teóricas realizadas en las clases de teoría. Para ello, los alumnos dispondrán de un guion de prácticas, elaborado por el profesorado, que suponga una guía clara y minuciosa de los fundamentos de la práctica y de los distintos apartados que deben guiarlos en su realización, sin ser, obviamente, un sustituto de la discusión crítica de la que se vaya a realizar. Además, el profesor debe explicar de manera didáctica la práctica a realizar mediante métodos audiovisuales. Ello ayudará a la comprensión de la tarea a realizar y a qué se debe esperar de esa práctica.

El alumnado deberá entregar una memoria de la práctica o un trabajo que consista en el desarrollo de un proyecto determinado. Para facilitar dicha realización se mostrará un ejemplo de memoria modelo y se establecerá un esquema que permita la exposición de los objetivos, el dispositivo experimental, las medidas realizadas, las representaciones gráficas, los resultados de ajustes o análisis de los datos obtenidos y la presentación de conclusiones. Todo ello, debe presentarse sin haber copiado frases del guion de prácticas, sino usando sus propias palabras. Esta tarea supone un buen entrenamiento para los alumnos que, posteriormente, tanto en la carrera como en su vida profesional, tendrán que realizar Proyectos fin de Carrera, Informes y/o Proyectos en el desarrollo de su profesión.

Un aspecto fundamental es la sincronización de las prácticas con los temas dados en teoría. Es decir, el alumno debe haber recibido la lección teórica en la que esté basada la práctica de laboratorio antes de dicha práctica y además en un tiempo relativamente reciente, para que pueda relacionar con relativa facilidad y rapidez los conceptos que se utilicen.

El trabajo en equipo o autoaprendizaje es la realización de trabajos de investigación o de profundización en algún tema científico por parte de grupos pequeños o de forma individual. Mucho más extendido en los últimos cursos o máster, es una herramienta perfectamente válida para incentivar no solo en la materia, sino también en ciertas competencias, como la búsqueda y selección de la información, estructuración de la información para su presentación y exposición del trabajo. Este método tiene varias ventajas:

- Incentiva la participación activa del alumnado en la clase.
- Desarrolla competencias específicas, como el trabajo en grupo.
- Permite desarrollar competencias relacionadas con las habilidades comunicativas.
- Recibe una retroalimentación instantánea, no solo por parte del profesorado, sino también de parte del resto de la clase.
- Incentiva la participación y, por lo mismo, la motivación del alumnado para intervenir en la clase.

El trabajo debe ser escogido por el profesorado o, al menos, dar a elegir entre una serie de temas para que la temática sea guiada. Puede tratar desde una revisión bibliográfica sobre un tema, diferentes formas experimentales de conseguir una demostración de alguna materia ya dada en teoría o el planteamiento y solución a un problema diseñado, al desarrollo de un tema de investigación.

En esta parte, el profesorado no solo debe ofrecer temas claros, sino que debe aportar los recursos necesarios para que sus alumnos puedan llevarlo a cabo. Para aquellos más aventajados, se pueden elegir problemas con un cierto grado de incertidumbre, e incluso plantear contradicciones o absurdos, forzándolos así a una mayor tarea conceptual y exponiéndolos a un mundo un tanto complejo y muy interdisciplinar en el que se han de tomar decisiones, no siempre con suficientes datos, al que deben proponer soluciones imaginativas.

Como se ha comentado, esta técnica es de gran valor en los cursos superiores de la universidad y con grupos reducidos; sin embargo, se plantean serias dudas acerca de la viabilidad de esta técnica en grupos numerosos de los primeros cursos y en asignaturas obligatorias.

Seminarios y conferencias

Los seminarios constituyen un complemento importante de la enseñanza programada y pueden organizarse sistemática u ocasionalmente a lo largo del curso. Aquí, hay que separar los seminarios impartidos por el profesorado de la asignatura o ajeno a ella y los impartidos por el propio alumnado. Ambas opciones tienen que basarse en la ampliación de los conocimientos expuestos en la asignatura y deberían ser relevantes por alguna noticia publicada o por su actualidad. Así, los típicos seminarios que se pueden ofrecer son, por ejemplo, los relacionados con el galardón del último Nobel de Física o con algún descubrimiento reciente que haya saltado a los medios de comunicación. Estos últimos son generalmente preparados por el profesorado de la universidad; sin embargo, los impartidos por los alumnos son los que conllevan mayor función pedagógica.

Los seminarios impartidos por el alumnado, ya sea de forma grupal o individual, permiten completar su formación y tener un trato más directo con el profesorado que lo va a guiar en su preparación. Generalmente, el alumnado realizará una amplia búsqueda bibliográfica que desembocará en la organización, síntesis, presentación y exposición de un tema específico, siempre que esté relacionado con la asignatura y haya sido tutelado por el profesorado de la misma. Este seminario debe estar diseñado para incentivar la interactividad con y entre el alumnado, permitiendo que se abra un foro de debate sobre el tema tratado para tratar de explotar la adquisición de ciertas habilidades, como la consolidación de opiniones, la elaboración de argumentos, junto a la defensa de las ideas que deben aprender a expresar con la debida corrección.

Visitas a centros de investigación

Teniendo en cuenta la envidiable situación de la ULL en lo que se refiere a su cercanía al Instituto de Astrofísica de Canarias y a sus telescopios, visitar ese centro y sus instrumentos no tiene solo valor en cuanto a la adquisición de conocimientos, sino también en la motivación del alumnado. El hecho de poder observar personal y físicamente a investigadores trabajando en diferentes campos, muchos de ellos con el denominador común de la asignatura objeto de estudio, constituye un elemento motivador para el alumnado, que, en ciertos casos, puede considerar incluso como meta personal el poder acceder un día a un puesto igual o similar.

La visita debe relacionar de forma útil los conocimientos que se van a obtener dentro de la asignatura con su aplicación práctica. En ese sentido, es importante que la visita posea un carácter atractivo para los alumnos, alguno de los cuales, insistimos, podrá llegar a considerarla como una posible salida profesional. A su vez, el alumnado podrá actualizarse con los avances de la tecnología, lo que también resulta de máximo interés para pensar en otras posibles salidas laborales.

Al igual que en la parte anterior, esta metodología es más adecuada para el alumnado

de los últimos cursos del grado, en razón de que el alumnado es menos numeroso y está más preparado.

En la tabla 4.1 enseñamos las actividades formativas en créditos ECTS de la asignatura, así como la metodología de enseñanza-aprendizaje que aparece en la guía docente y la relación con las competencias.

Actividades formativas	Horas presenciales	Horas de trabajo autónomo	Total horas	Relación con competencias
Clases teóricas	21	23	44	[CG1], [CG4], [CE6], [CG2], [CX4], [CB8], [CB6], [CE1]
Clases prácticas	7	8	15	[CG1], [CE7], [CB7], [CG4], [CE6], [CG2], [CB10], [CE10], [CX4], [CB8], [CB6]
Realización de trabajos	0	6	6	[CG1], [CE7], [CB7], [CG4], [CE6], [CG2], [CB10], [CE10], [CX4], [CB8], [CB6], [CE1]
Preparación de exámenes	0	8	8	[CG1], [CE7], [CG4], [CE6], [CB10], [CX4], [CB8], [CE1], [CB6]
Realización de exámenes	2	0	2	[CE7], [CB8], [CB7], [CG4], [CX4]
Total horas	30	45	75	
Total ECTS			3	

Cuadro 4.1: Créditos ECTS, su metodología de enseñanza-aprendizaje y su relación con las competencias que debe adquirir el estudiante.

4.4. Evaluación

La evaluación constituye el broche final de nuestra programación docente, ya que es una de las fases más importantes y, sin duda, la más delicada del proceso. Como ya se ha explicado en detalle con anterioridad en el capítulo 3, más concretamente para la asignatura elegida, en la sección 3.7, consiste en una recogida sistemática de información con el propósito de emitir un juicio sobre el aprendizaje del alumno que cuantifica el grado de cumplimiento de los objetivos marcados. Por lo tanto, la evaluación debe establecer si el alumno ha superado los niveles mínimos exigidos de conocimiento y habilidades en la materia, lo que comúnmente la sitúa en una de las tareas menos gratas para el profesor. En el caso concreto de esta asignatura, según lo que establece la Guía Docente, la evaluación se llevará a cabo de forma ponderada.

Este sistema de evaluación tendrá una duración de un curso académico, en el que la evaluación continua realizada a lo largo del curso se conservará inalterada, siguiendo las pautas expuestas en el capítulo 3, sección 3.7. Dado que la estrategia evaluativa tiene una

parte importante de evaluación continuada a lo largo del curso, es importante el seguimiento diario de la asignatura, especialmente de forma presencial con la asistencia a las clases teóricas y de problemas, y realizar los ejercicios propuestos.

En cuanto a los resultados del aprendizaje, esta asignatura proporciona al estudiante, por una parte, conocimientos introductorios en la teoría de acreción y sus aplicaciones en escenarios astrofísicos concretos, en especial en sistemas binarios compactos. Se pretende que conozca sus fundamentos, la metodología para su estudio y el estado actual en las investigaciones.

El alumnado recibirá una introducción a la teoría y fundamentos de la física de los tres tipos de objetos compactos conocidos: enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros. Con esta introducción, estará en condiciones de profundizar en el campo de investigación a nivel profesional en caso de que lo necesitase.

CAPÍTULO

5

ESTRUCTURA DE LA ASIGNATURA

El temario de esta asignatura es muy amplio. Al tratarse de física, nos centraremos sobre todo en los aspectos físicos de los diferentes problemas, lo que requiere un enfoque matemático de la asignatura, pero siempre recordando al alumnado el contexto astrofísico de la misma, no sólo ya porque se imparta en el departamento de astrofísica, sino porque es la conexión evidente con los experimentos. Recordemos que, en física, los experimentos siempre tienen la última palabra.

Por otra parte, es importante comprender que explicar en detalle la física de los agujeros negros, estrellas de neutrones y enanas blancas en un solo curso que, además, recoge también los procesos de acreción, resulta una empresa prácticamente imposible si se intenta hacer de forma detallada.

Esto es tanto más cierto porque es muy importante hacer una introducción de repaso a los conceptos matemáticos indispensables de análisis y geometría y topología diferencial.

Por eso, he decidido centrarme en la relatividad general en el régimen de gravedad extrema, es decir, en los agujeros negros, pero sin olvidar el resto de objetos compactos. El propósito de esta elección es el de dotar al alumnado las herramientas necesarias para que luego pueda explorar con más detalle de forma independiente los otros dos tipos de objetos compactos, las estrellas de neutrones y las enanas blancas. Al estudiar en detalle un caso extremo, los agujeros negros, se podrá explorar sin mayores problemas estos dos otros objetos, yendo de mayor gravedad (los agujeros negros) a menor. Es decir, primero

las estrellas de neutrones y, luego, las enanas blancas.

Es decir, el grueso del curso se centrará sobre estos objetos extremos. Aunque no se dedicará tanto tiempo a los otros dos tipos, sí que se hará una introducción lo suficientemente general para que el alumnado pueda tener una idea global que le ayude en un estudio ulterior.

Finalmente, la física de acreción se irá intercalando poco a poco durante la presentación de los objetos compactos, como una aplicación astrofísica de la física presentada, al mismo tiempo que, obviamente, se hará una descripción de su propia física. Sin embargo, tras haber presentado los tres tipos de objetos compactos, haremos una descripción más general del tema, como última parte del curso.

En esta parte de la memoria he evitado las referencias a los artículos y libros de texto que exponen los argumentos que menciono. Al contrario que en un artículo científico, este texto no intenta hacer una exposición o revisión de un tema científico. Por eso, para mantener las referencias al mínimo posible, incluyo un listado de libros que considero que el alumnado debería estudiar durante el curso o, al menos, consultar. En estos libros se encuentran las fuentes que menciono en los diferentes apartados.

El propósito de este texto es el de hacer un compendio de los aspectos más importantes que creo que el alumnado debería aprender durante el curso, así como presentar su estructura. Como he tenido el tiempo para hacerlo, el contenido, aunque no detallado, sí intenta recoger una vasta variedad de cuestiones. No es sin embargo mi intención el abarcar completamente todo el temario que expongo aquí. Como todo docente universitario sabe, esto depende del curso, motivación y otros aspectos de los estudiantes. Cuánto del temario y qué aspectos del mismo se detallen en mayor o menor profundidad se decidirá según cada caso.

CAPÍTULO

6

TEMARIO DETALLADO

6.1. Física de objetos compactos y procesos de acreción

La forma de introducir la materia al alumnado debe comenzar con una discusión general sobre el tema para despertarles el interés. Esto es relativamente sencillo en la materia que pasamos a desarrollar, “Física de Objetos Compactos y Procesos de Acreción”.

Aunque hoy en día estemos acostumbrados a ellos, por la difusión que se les ha dado en el mundo cinematográfico, en particular desde las observaciones de las ondas gravitacionales, los objetos compactos, y en particular los agujeros negros, son los objetos más contraintuitivos que nos podamos imaginar en nuestro universo.

Eso no es sólo porque la gravitación nos pueda resultar sumamente compleja, sino por la existencia de fenómenos tales como que la luz se pueda curvar y que la hora dada por relojes pueda diferir dependiendo de quién los observa. Lo peor de todo, por decirlo de una forma irónica, es que estos hechos no son “sólo” teóricos, sino que los hemos observado y usado de forma constante. Por ejemplo, cuando usamos un teléfono móvil para encontrar un restaurante en la calle.

Desde nuestro cerebro newtoniano, no estamos acostumbrados a estas cosas y mucho menos a soluciones teóricas del interior de esos objetos tan extraños. Por eso, es más que correcto y necesario el escepticismo científico que es motor de todos los resultados que definen nuestra vida cotidiana, desde la enunciación de los principios lógicos de Aristóteles.

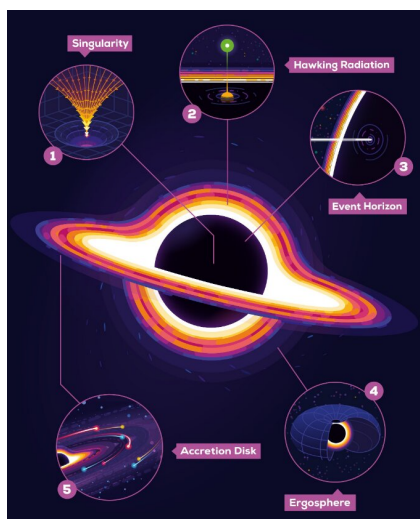


Figura 6.1: Ilustración esquemática de uno de los temas de la asignatura que describiremos en esta sección. Uno de los principales objetivos será el de los agujeros negros, que describiremos haciendo hincapié en los aspectos astrofísicos pero sin desdeñar los matemáticos, desde la singularidad hasta el disco de acreción. Esta imagen es de <https://kurzgesagt.org/>.

Es interesante recordar en este contexto las palabras de Eddington respecto a los agujeros negros: “¡Creo que debería haber una ley de la naturaleza que impidiese que una estrella se comporte de una manera tan absurda!” [13].

Aunque nos hayamos devanado la cabeza en el intento, no encontramos forma de demostrar que este caso extremo de objeto compacto no debería existir. Y, cuanto más pasa el tiempo, más evidencias encontramos de que sí existen. En este contexto es importante la palabra evidencia, porque estamos hablando de astrofísica y física, no de matemáticas. En ciencia nunca tenemos una prueba de nada, sino que sustituímos, reemplazamos una teoría por otra mejor que describe la realidad. Al fin y al cabo, la misma palabra, teoría, nos dice de qué se trata. Simplemente de una observación, del acto de observar, $\theta\epsilon\omicron\rho\acute{\epsilon}\omega$, “observo”.

Esto quiere decir que cualquier objeto lo suficientemente masivo, por ejemplo una patata supermasiva, debe necesariamente colapsar a un agujero negro si la gravedad supera todas las fuerzas opuestas (típicamente la presión ejercida en el interior de las estrellas). Hoy en día tenemos al menos dos evidencias lo bastante importantes de que estos objetos existen: El centro de nuestra propia galaxia, cuyas observaciones llevaron al premio Nobel el dos mil veinte y las observaciones de una galaxia vecina, M82, con el Event Horizon Telescope.

6.2. Tema I: Agujeros negros

Motivación astrofísica

En este primer punto, se le presentará al alumnado el contexto histórico que llevó a considerar la posibilidad de la existencia de agujeros negros. Un caso clave para esto son los agujeros negros supermasivos, por los recientes descubrimientos que hemos ido haciendo en los últimos años. Más específicamente, se hablará del caso de Sagitario A*, el agujero negro en el centro de nuestra galaxia y de las observaciones de M82.

Observaciones de centros de galaxias: SgrA*

En un artículo publicado el 31 de octubre de 2018, se anunció el descubrimiento de una evidencia difícil de rechazar de que Sagitario A* es un agujero negro [14]. Utilizando el interferómetro GRAVITY y los cuatro telescopios del Very Large Telescope (VLT) para crear un telescopio virtual de 130 metros de diámetro, el equipo de astrónomos detectaron cúmulos de gas que se movían a un 30 % de la velocidad de la luz. La emisión de electrones altamente energéticos muy cerca del agujero negro fue visible en forma de tres prominentes llamaradas brillantes. Éstas coinciden exactamente con las predicciones teóricas que predicen la existencia de un agujero negro de cuatro millones de masas solares.

Hay una serie de estrellas en órbita cercana a Sagitario A*, que se conocen colectivamente como “estrellas S”. Estas estrellas se observan principalmente en longitudes de onda infrarrojas de la banda K, ya que el polvo interestelar limita drásticamente la visibilidad en longitudes de onda visibles. Se trata de un campo que cambia rápidamente.

Las altas velocidades y las aproximaciones al agujero negro supermasivo hacen que estas estrellas sean útiles para establecer los límites de las dimensiones físicas de Sagitario A*, así como para observar los efectos asociados a la relatividad general, como el desplazamiento del pericentro de sus órbitas. Se mantiene una vigilancia activa ante la posibilidad de que las estrellas se acerquen al horizonte de sucesos lo suficiente como para ser perturbadas, pero no se espera que ninguna de estas estrellas sufra tal destino.

Desde 2020, la estrella S4714 tiene el récord de mayor aproximación a Sagitario A*, a unas 12,6 UA (1.880 millones de km), casi tan cerca como Saturno del sol, viajando a un 8 % de la velocidad de la luz. Estas cifras son aproximadas, siendo las incertidumbres formales de $12,6 \pm 9,3$ UA y 23.928 ± 8.840 km/s. Su período orbital es de 12 años, pero una excentricidad extrema de 0,985 es el responsable del acercamiento tan extremo y de su alta velocidad.

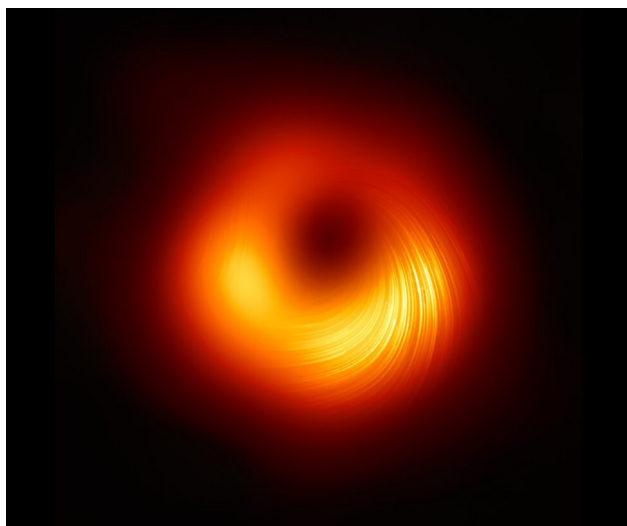


Figura 6.2: M87 en luz polarizada, <https://www.eso.org/public/images/eso2105a/>.

El EHT y M82

La colaboración del Event Horizon Telescope (Telescopio del Horizonte de Sucesos) anunció sus primeros resultados 10 de abril de 2019: la primera “imagen” directa de un agujero negro, que mostró el agujero negro supermasivo en el centro de Messier 87, designado M87* [15].

La imagen puso a prueba la teoría general de la relatividad de Albert Einstein, cosa que ya se había hecho con los movimientos de las estrellas y las nubes de gas cerca del borde de un agujero negro. Sin embargo, la “imagen” de un agujero negro acerca aún más las observaciones al horizonte de sucesos. La relatividad predice una región oscura parecida a una sombra, causada por la curvatura gravitatoria y la captura de la luz, que coincide con la imagen observada. El artículo publicado afirma: “En general, la imagen observada es coherente con las expectativas de la sombra de un agujero negro de Kerr, tal como predice la relatividad general”.

La imagen también proporcionó nuevas mediciones de la masa y el diámetro de M87*. El EHT midió la masa del agujero negro en $6,5 \pm 0,7$ mil millones de masas solares y midió el diámetro de su horizonte de sucesos en aproximadamente 40 mil millones de kilómetros (270 UA; 0,0013 pc; 0,0042 ly), aproximadamente 2,5 veces más pequeño que la sombra que proyecta. En la figura 6.2 vemos una de las imágenes que publicó el equipo del EHT.

Es importante que se introduzca en este primer bloque una pequeña introducción a la teoría de dinámica estelar, que será de utilidad a la hora de hacer una descripción de cómo se forman las fuentes de ondas gravitacionales en núcleos galácticos y cúmulos globulares. El enlace entre los agujeros negros y estas ondas es obvio e importante.

Introducción matemática

Es importante que el alumnado tenga presentes qué conceptos matemáticos van a ser clave para llegar a comprender bien la física que se les presentará en este curso. Esto es particularmente cierto en el caso de los agujeros negros, pero no es dispensable en el de las estrellas de neutrones y enanas blancas.

Para esto, se hará una introducción a diversos temas de matemáticas. La forma lógica de comenzar es con un compendio de análisis matemático, que permite introducir los conceptos de límites e integrales de Lebesgue como antecámara a la geometría diferencial y, más tarde, a la topología diferencial. Es necesario, sin embargo, que el alumnado tenga también conceptos de la teoría de la medida, necesaria para comprender qué es un espacio métrico o un campo vectorial de Killing, para mencionar dos ejemplos fundamentales.

En este apartado, en vez de dar un claro plan de los temas que se abordarán en esta introducción matemática, hacemos una sucinta descripción de los libros más interesantes para el alumnado. Además, señalamos para qué propósitos pueden usarse estos libros y cómo están relacionados entre sí.

"Algebra" , by Michael Artin. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall. 1991. 2nd edition. Boston: Pearson Education. 2011

Se recomienda estudiar el primer capítulo, sobre matrices y determinantes para tener una formación algebraica necesaria para hacer cálculo exterior. Se debe leer con detalle y luego todo lo que haya en el libro relacionado con grupos y espacios vectoriales. Es fundamental para el cálculo en colectores. Los capítulos 1 - 6 en particular son relevantes, y el 8.

"Analysis I." Third edition, by Terence Tao. Texts and Readings in Mathematics, 37. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2014. xviii+347 pp. ISBN 978-93-80250-64-9.

Es un buen libro para el autoaprendizaje. Los métodos que utiliza son generales. Todo se hace en el contexto de la línea unidimensional, pero de tal manera que las técnicas y el proceso de pensamiento que se utilizan pueden extenderse a espacios métricos generales. Se puede excluir el capítulo de la integral de Riemann, el último, porque está fuera del alcance de este programa.

"Topologie" , by Klaus Jänich. Springer-Verlag, 8. Auflage 2005, ISBN 978-3-540-21393-2, doi:10.1007/b138142 (Allgemeine Topologie, englische Übersetzung bei Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1984)

Léase en detalle los capítulos I-IV. Este libro es como el de Lee, pero más compacto, lo que tiene pros y contras. Podría considerarse como una alternativa o complemento del de Lee (véase el último de la lista). Si se opta por el de Lee, se debería leerlo todo, incluida la compacidad, donde habría que hacer una pausa antes de pasar al tercer

bloque. Si ha terminado la compacidad, puede seguir estudiándola de forma paralela mientras avanza hacia el 3er bloque.

En este sentido, se puede considerar este libro como una introducción al libro de Lee. Parte de definiciones básicas y topológicas, nada especial, pero transmite un buen conocimiento práctico de lo que es un espacio topológico.

Los primeros capítulos basados en la topología general pueden ser muy difíciles porque son más compactos. El de Lee discute con más detalle. El interés del autor se centra en la geometría y, por tanto, la topología general se introduce rápidamente y sin tanto detalle.

En particular, el primer capítulo puede ser difícil. Considere recurrir al libro de Lee una y otra vez si encuentra dificultades. El capítulo III es el más desafiante, ya que cubre la construcción de espacios topológicos mediante el encolado. Es el más importante de la topología.

"Analysis II." , by Terence Tao. Third edition. Texts and Readings in Mathematics, 38. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2014. xvi+218 pp. ISBN 978-93-80250-65-6

Este libro trata de la topología de los espacios métricos. Continúa con los espacios de funciones continuas, discutiendo las técnicas de aproximación (aproximación por polinomios y series trigonométricas). Esto es útil porque nos permite aproximar funciones "aproximadas" con funciones "bien hechas".

Los tres últimos capítulos son una introducción al cálculo multivariable moderno. Termina con la integral de Lebesgue como herramienta para introducir el volumen. Es una generalización de la integral de Riemann, pero la demostración es más fácil de entender.

"Algebra" , by Michael Artin. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall. 1991. 2nd edition. Boston: Pearson Education. 2011

Se debería estudiar todo lo relacionado con los anillos y la teoría de la representación. En particular los capítulos 9, 10 y 11. De forma adicional, pero tal vez no necesariamente, considérese estudiar los otros, desde el 12 hasta el final.

"Introduction to Differential Topology" by Klaus Jänich and Theodor Bröcker, Cambridge University Press, 1982, ISBN 13: 9780521284707. Author: Brocker, Theodor ISBN 10: 0521284708.

Lectura incondicional, completa y detallada. Es fundamental. No intente comprender la relatividad general sin este libro. No avance ni respire sin él.

"Analysis: Second Edition" , by Elliott H. Lieb and Michael Loss. Graduate Studies in Mathematics Volume: 14; 2001; 348 pp. Print ISBN: 978-0-8218-2783-3

Dos relativistas matemáticos. Este libro puede describirse como un homenaje a las teorías de aproximación, de forma rigurosa. Está conectado directamente con la física. El libro presenta técnicas para aplicar en la teoría de campos relativista (especial) y en la mecánica cuántica relativista. También se discuten problemas clásicos (lo que no significa “fáciles”) en el contexto de las técnicas de análisis de funciones.

“A Comprehensive Introduction to Differential Geometry” , by Michael Spivak. Publish or Perish; revised 3rd ed. 2005.

De este libro se debería estudiar todo lo relacionado con los grupos de Lie. Es decir, un capítulo. Sin la topología diferencial se estará perdido para el resto del programa.

“A Comprehensive Introduction to Differential Geometry” , by Michael Spivak, Volume 2. Publish or Perish; revised 3rd ed. 2005.

El autor utiliza los trabajos originales de Gauss y Riemann y los presenta en un lenguaje moderno, incluyendo las pruebas. Spivak introduce de forma intuitiva las conexiones afines y el tensor de Riemann. Se trata de una de las mejores explicaciones de la geometría diferencial real en la literatura. Sin embargo, el libro no incluye ejercicios. Hay que recurrir a otros libros como el de O’Niell, pero el estudio de las pruebas de Spivak es probablemente suficiente para la mayoría de los contenidos.

“Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity” , by Barrett O’Niell. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. xiii+468 pp. ISBN 0-12-526740-1

Este libro presenta una forma matemática de estudiar geometría diferencial con el propósito entender la relatividad general. El autor utiliza un enfoque general, el concepto de geometría semirriemanniana con producto interior pero sin hacer sin ninguna suposición sobre la firma. La geometría de Lorentz y Riemann se abordan en particular sólo cuando es necesario. Es decir, los casos específicos se muestran sólo en algunos casos.

“Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable” , by Lars Ahlfors. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978. xi+331 pp. ISBN 0-07-000657-1

Este texto es indispensable por tres razones. En primer lugar, muchas pruebas de análisis se basan en el análisis complejo. Por otra parte, muchas nociones topológicas surgen del análisis complejo. Las nociones de homotopía y homología están relacionadas con el cálculo de residuos. Por ejemplo, toda superficie orientable se construye a partir de superficies de Riemann (es decir, variedades complejas unidimensionales). Estos conceptos son comunes en la teoría cuántica de campos y en la

teoría de cuerdas en particular. Incluso aparecen cuando se intenta calcular amplitudes de probabilidad simples, ya que se hace por continuación analítica, un tema relacionado con las superficies de Riemann.

“Introduction to Topological Manifolds”, by John Marshall Lee, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 2000, 2nd edition 2011

Se necesitará constantemente, en particular cuando se lea Janich. Éste es probablemente el más importante de toda la lista de libros mencionados aquí.

Agujeros negros de Schwarzschild

En este bloque se le presentará al alumnado la métrica de Schwarzschild (también conocida como solución de Schwarzschild). Esta es una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein que describe el campo gravitatorio fuera de una masa esférica, suponiendo que la carga eléctrica de la masa, el momento angular de la masa y la constante cosmológica universal sean nulos. La solución es una aproximación útil para describir objetos astronómicos que giran lentamente, como muchas estrellas y planetas. Fue hallada por Karl Schwarzschild en 1916, y más o menos al mismo tiempo por Johannes Droste, que publicó su discusión más completa y moderna cuatro meses después de Schwarzschild. Se discutirá el teorema de Birkhoff para que se comprenda la importancia de este resultado. Este teorema prueba que cualquier solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo del vacío debe ser estática y asintóticamente plana. Esto significa que la solución exterior (es decir, el espaciotiempo fuera de un cuerpo esférico, no giratorio y gravitatorio) tiene que estar descrito por la métrica de Schwarzschild.

Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Llegados a este punto en el programa, presentaremos las coordenadas de Eddington-Finkelstein (que en realidad son, al parecer, de Penrose). Este es un paso lógico en el desarrollo del temario porque nos permitirá presentarle al alumnado de forma paulatina el contexto matemático necesario dentro de la marco físico.

En estos sistemas de coordenadas, los rayos de luz radiales que viajan hacia fuera (hacia dentro) siguen cada uno una geodésica nula y definen las superficies de tiempo constante. La coordenada radial es la coordenada de área habitual, de modo que las superficies de simetría de rotación tienen un área de $4\pi r^2$. Una ventaja de este sistema de coordenadas es que muestra que la aparente singularidad en el radio de Schwarzschild es sólo una singularidad de coordenadas y no es una verdadera singularidad física.

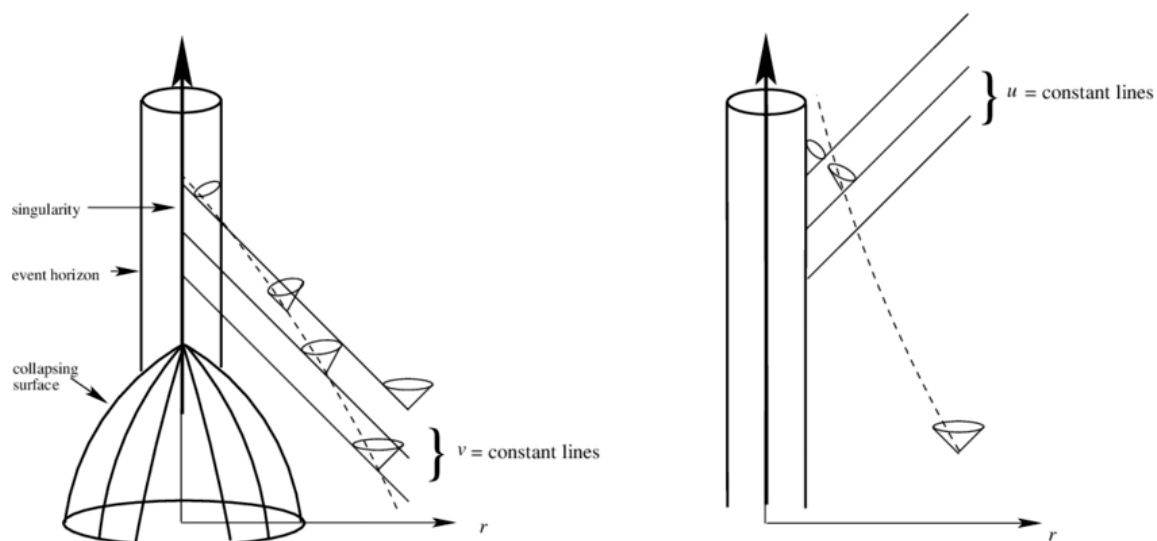


Figura 6.3: Las coordenadas Eddington-Finkelstein entrantes (izquierda) y las coordenadas Eddington-Finkelstein salientes (derecha). La línea discontinua representa una partícula de tipo temporal entrante. Esta figura es la 1 del trabajo de [16].

Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Estas coordenadas nos permitirán seguir avanzando en el tema para presentar al alumnado las coordenadas Kruskal-Szekeres, llamadas así por Martin Kruskal y George Szekeres. Estas coordenadas tienen la ventaja de que cubren la totalidad del espacio-tiempo de la solución de Schwarzschild maximizada y se comportan bien en todas partes fuera de la singularidad física. Como antes, no hay ninguna singularidad de coordenadas engañosa en el horizonte. Es importante enfatizar esto a los estudiantes.

Estas coordenadas de también se aplican al espacio-tiempo alrededor de un objeto esférico, pero en ese caso no dan una descripción del espacio-tiempo dentro del radio del objeto. El espacio-tiempo en una región en la que una estrella está colapsando en un agujero negro se aproxima por las coordenadas de Kruskal-Szekeres (o por las coordenadas de Schwarzschild). La superficie de la estrella permanece fuera del horizonte de sucesos en las coordenadas de Schwarzschild, pero lo atraviesa en las coordenadas de Kruskal-Szekeres. En este punto se hará hincapié en que en cualquier agujero negro que observamos, lo que realmente vemos en un momento en que su materia aún no ha terminado de colapsar, por lo que no es realmente un agujero negro todavía. Del mismo modo, los objetos que caen en un agujero negro permanecen fuera del horizonte de sucesos en coordenadas de Schwarzschild, pero lo cruzan en coordenadas de Kruskal-Szekeres. En la figura 6.4 explicamos esto de forma más detallada. En la figura 6.5 mostramos un esquema ilustrativo del concepto de horizonte de sucesos.

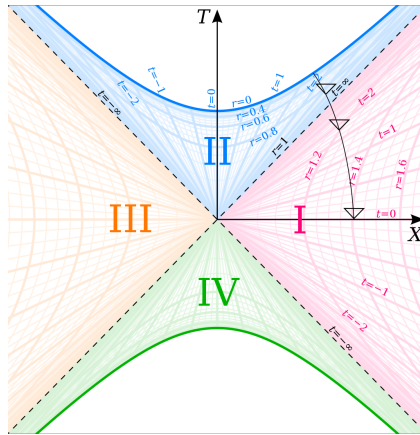


Figura 6.4: Diagrama de Kruskal-Szekeres, ilustrado para $2GM = 1$. Las superficies coloreadas son el interior del agujero negro (II), el interior del agujero blanco (IV) y las dos regiones exteriores (I y III). Las líneas punteadas de 45° que separan estas cuatro regiones son los horizontes de sucesos. Las hipérbolas más oscuras que delimitan la parte superior e inferior del diagrama son las singularidades físicas. Las hipérbolas más claras representan los contornos de la coordenada r de Schwarzschild, y las líneas rectas que pasan por el origen representan los contornos de la coordenada t de Schwarzschild [17].



Figura 6.5: Ampliación de la figura 6.1 para ilustrar el horizonte de sucesos.

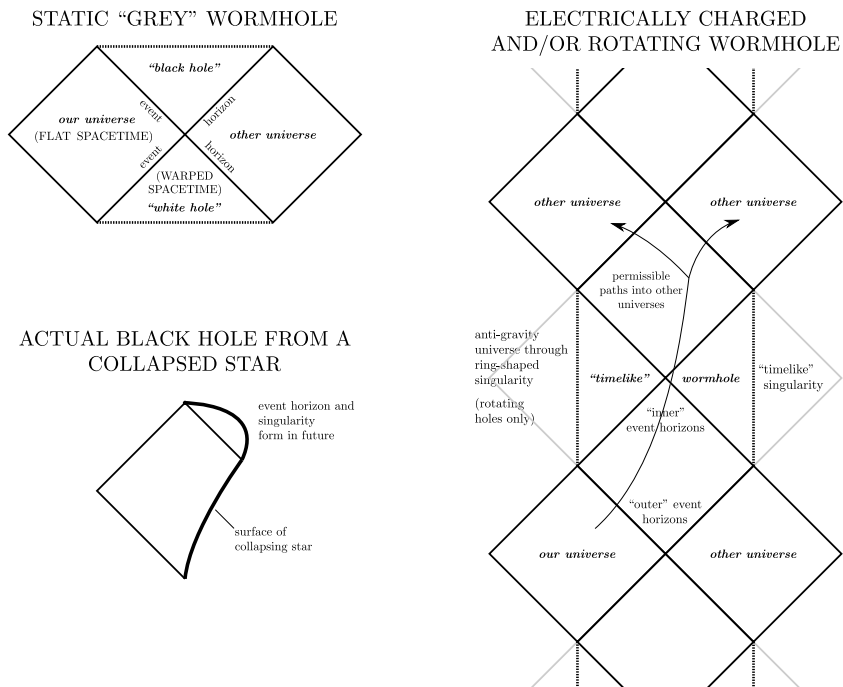


Figura 6.6: Diagramas de Penrose para diferentes soluciones de agujero negro [18].

Diagramas de Penrose

Estas últimas coordenadas nos permitirán presentar los diagramas conformes o de Penrose. Este tipo de diagrama es bidimensional y capta las relaciones causales entre distintos puntos del espaciotiempo mediante un tratamiento conforme del infinito. Es una extensión de un diagrama de Minkowski en el que la dimensión vertical representa el tiempo y la dimensión horizontal representa una dimensión espacial. En este diagrama todos los rayos de luz toman una trayectoria de 45° , es decir, $c = 1$.

La mayor diferencia es que, localmente, la métrica en un diagrama de Penrose es conformemente equivalente a la métrica real en el espaciotiempo. El factor de conformación se elige de forma que todo el espaciotiempo infinito se transforma en un diagrama de tamaño finito, con el infinito en el límite del diagrama. Es decir, traemos el infinito a la hoja de papel. Para los espaciotiempos esféricamente simétricos, cada punto del diagrama de Penrose corresponde a una esfera bidimensional (θ, ϕ) .

En clase se discutirán varias soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein gracias a estos diagramas conformes, que mostramos en la figura 6.6. Para discutir los diagramas conformes o de Penrose, se seguirá un esquema muy similar al presentado ya a mis conferencias disponibles aquí:

<https://astro-gr.org/conformal-diagrams/>

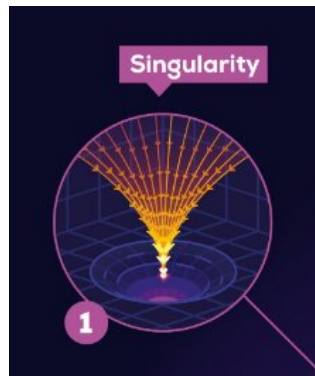


Figura 6.7: Ampliación de la figura 6.1. Es importante notar que esta ilustración es errónea en el caso en el que el agujero negro tenga rotación. Para ese tipo de solución, la singularidad no es un lugar, sino un momento o, para ser más concisos, el final del tiempo. Por lo tanto, esta ilustración no puede corresponder al caso de Schwarzschild, sino al de Kerr que, sin embargo, tiene una singularidad en forma de anillo y no de punto, como parece indicar el dibujo.

En particular, se hará hincapié al alumnado sobre los diferentes tipos de singularidades que hay en un agujero negro dependiendo de si es de Schwarzschild (espín cero) o de Kerr (espín diferente de cero). Esto nos permitirá seguir un proceso circular en las clases, porque las soluciones de Kerr, con y sin carga, las presentaremos más adelante. En la figura 6.7 mostramos una ampliación de la figura 6.1 que corresponde a una singularidad.

Agujeros negros con carga y en rotación

La solución de Reissner-Nordström

Una vez explorada en detalle la solución de las ecuaciones de campo de Einstein para agujeros negros sin rotación ni carga, el paso lógico es ir añadiendo niveles de complejidad adicionales al alumnado.

En este sentido, el siguiente paso es el de presentarles la solución que incluye el siguiente parámetro que define completamente un agujero negro, su carga. Más adelante, se discutirá sobre el último, la rotación o espín que, junto con la masa, define completamente un agujero negro.

La métrica de Reissner-Nordström es una solución estática de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, que corresponde al campo gravitatorio de un cuerpo cargado, no giratorio y esféricamente simétrico de masa M . La solución análoga para un cuerpo cargado y giratorio viene dada por la métrica de Kerr-Newman.

En coordenadas esféricas, la métrica de Reissner-Nordström (es decir, el elemento de línea, equivalente en cierta forma a un vector de desplazamiento infinitesimal en un espa-

cio métrico) es

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (6.1)$$

donde c es la velocidad de la luz, τ es el tiempo propio, t es la coordenada temporal (medida por un reloj estacionario en el infinito), r es la coordenada radial, (θ, φ) son los ángulos esféricos, $r_s = 2GM/c^2$ es el radio de Schwarzschild y $r_Q^2 = Q^2 G/(4\pi\epsilon_0 c^4)$ es una escala de longitud característica, asociada al problema, con ϵ_0 la constante eléctrica.

La masa total del cuerpo central y su masa irreducible están relacionadas por

$$M_{\text{irr}} = \frac{c^2}{G} \sqrt{\frac{r_+^2}{2}} \rightarrow M = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 G M_{\text{irr}}} + M_{\text{irr}}. \quad (6.2)$$

La diferencia entre M y M_{irr} se debe a la equivalencia de masa y energía, que hace que la energía del campo eléctrico también contribuya a la masa total.

En el límite en el que la carga Q (o equivalentemente, la escala de longitud r_Q) llega a cero, se recupera la métrica de Schwarzschild. La teoría clásica de la gravedad de Newton puede entonces recuperarse en el límite en el que la relación r_s/r es cero. Es decir, en el límite en que tanto r_Q/r como r_s/r llegan a cero, la métrica se convierte en la métrica de Minkowski de la relatividad especial.

En la práctica, el cociente r_s/r suele ser extremadamente pequeño. Por ejemplo, el radio de Schwarzschild de la tierra es de aproximadamente 9 mm. En la superficie de la tierra las correcciones a la gravedad newtoniana son sólo una parte entre mil millones. La relación sólo es importante cerca de los agujeros negros y otros objetos ultradensos, como las estrellas de neutrones.

Aunque los agujeros negros cargados con $r_Q \ll r_s$ son similares a los agujeros negros de Schwarzschild, a diferencia de estos, tienen dos horizontes: el de sucesos y un horizonte adicional, de Cauchy, interno. Al igual que con la métrica de Schwarzschild, los horizontes de sucesos para el espaciotiempo se encuentran donde la componente métrica g_{rr} ; es decir, donde

$$1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} = -\frac{1}{g_{rr}} = 0. \quad (6.3)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones (dos horizontes):

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left(r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4r_Q^2} \right). \quad (6.4)$$

Estos horizontes de sucesos son concéntricos y se degenerados para $2r_Q = r_s$. Esta

solución se denomina “agujero negro extremo”. Los valores $2r_Q > r_s$, aunque matemáticamente válidos, no tienen significado físico.

Esto es así porque el término bajo la raíz cuadrada se vuelve negativo para una carga mayor que la masa. Esto se ha interpretado diciendo que objetos de carga mayor que su masa, aunque pueden existir en la naturaleza, no pueden colapsar para formar un agujero negro, porque darían paso a la formación de una singularidad desnuda.

Agujeros negros en rotación

La métrica de Kerr describe la geometría del espacio-tiempo vacío en torno a un agujero negro axialmente simétrico en rotación con un horizonte de sucesos cuasiesférico. Esta métrica es una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein de la relatividad general; las ecuaciones son altamente no lineales, lo que hace que las soluciones exactas sean muy difíciles de encontrar.

Es importante explicarle al alumnado que la solución exacta para un agujero negro no cargado y en rotación quedó sin resolver hasta 1963, cuando fue descubierta por Roy Kerr (durante un congreso de astrofísica en el que nadie le prestó atención, según el propio Kerr explicó durante un convenio en el que participé). La extensión natural de esta solución, la que describe un agujero negro cargado y en rotación, la métrica de Kerr-Newman, fue descubierta poco después, en 1965.

Según la métrica de Kerr, un cuerpo en rotación arrastra el espaciotiempo alrededor de él, lo que se denomina como precesión Lense-Thirring. La primera medida de este efecto se realizó en 2011 mediante el experimento Gravity Probe B.

A grandes rasgos, este efecto predice que los objetos que se acercan a una masa en rotación se verán arrastrados a participar en su rotación, no debido a ninguna fuerza aplicada o par de torsión que pueda sentirse, sino más bien debido a la curvatura del propio espaciotiempo asociada a los cuerpos en rotación. En el caso de un agujero negro en rotación, a distancias lo suficientemente cercanas, todos los objetos *incluso la luz* deben girar con el agujero negro; la región en la que esto ocurre se denomina ergosfera. En la figura 6.8 damos una ilustración esquemática de la misma.

La luz procedente de fuentes lejanas puede viajar alrededor del horizonte de sucesos varias veces (si está lo suficientemente cerca); creando múltiples imágenes del mismo objeto.

Los agujeros negros en rotación tienen superficies en las que la métrica *parece* tener aparentes singularidades; el tamaño y la forma de estas superficies depende de la masa y el momento angular del agujero negro. La superficie exterior encierra la ergosfera y tiene una forma similar a la de una esfera aplanada, como podemos ver en la figura 6.9. La superficie interior marca el horizonte de sucesos; los objetos que pasan al interior de este horizonte no pueden volver a comunicarse con el mundo fuera de él. Sin embargo, ninguna de las dos superficies es una verdadera singularidad, ya que su aparente singularidad



Figura 6.8: Ampliación de la figura 6.1 para ilustrar el concepto de ergosfera. Ésta aparece de forma elipsoidal y el horizonte interior y exterior, marcados en negro y un gradiente de naranja, son esféricos, como cabe esperar. Una ilustración más detallada se puede encontrar en la figura 6.9.

puede eliminarse en un sistema de coordenadas diferente. Los objetos que se encuentran entre estas dos superficies deben corotar con el agujero negro en rotación, como se ha señalado anteriormente

Hay varias superficies importantes en la métrica de Kerr. La superficie interior corresponde a un horizonte de sucesos similar al observado en la métrica de Schwarzschild; esto ocurre donde la componente puramente radial g_{rr} de la métrica llega al infinito. Resolviendo la ecuación cuadrática $1/g_{rr} = 0$ se obtiene la solución:

$$r_H^{\pm} = \frac{r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4a^2}}{2} \quad (6.5)$$

que en unidades naturales ($G = M = c = 1$) se simplifica a:

$$r_H^{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - a^2} \quad (6.6)$$

Mientras que en la métrica de Schwarzschild el horizonte de sucesos es el lugar en el que la componente puramente temporal g_{tt} de la métrica cambia de signo de positivo a negativo, en la métrica de Kerr esto ocurre a una distancia diferente. De nuevo, resolviendo una ecuación cuadrática para $g_{tt} = 0$ se obtiene la solución:

$$r_E^{\pm} = \frac{r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4a^2 \cos^2 \theta}}{2}, \quad (6.7)$$

En unidades naturales:

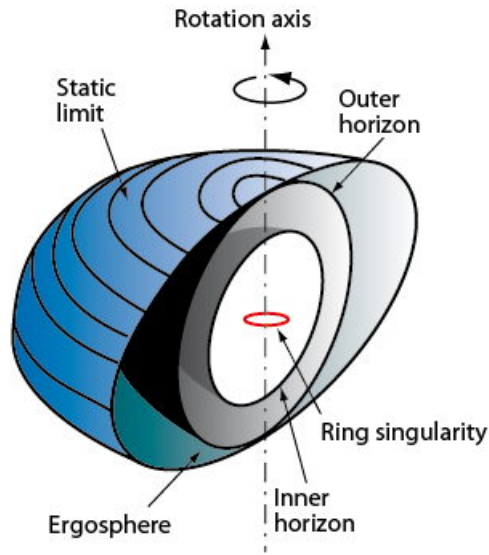


Figura 6.9: Horizontes de sucesos y ergosferas de un agujero negro en rotación; el anillo-singular se encuentra en el plano ecuatorial de la ergosfera interior. Esta es la figura 2 de [19].

$$r_{\text{E}}^{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (6.8)$$

Debido al término $\cos^2 \theta$ de la raíz cuadrada, esta superficie exterior se asemeja a una esfera aplanada que toca la superficie interior en los polos del eje de rotación, donde la coloidad θ es igual a 0 o π ; el espacio entre estas dos superficies se llama “ergosfera”.

Dentro de este volumen, la componente puramente temporal g_{tt} es negativa, es decir, actúa como una componente métrica puramente espacial. En consecuencia, las partículas dentro de esta ergosfera deben corotar con la masa interior si quieren mantener su carácter temporal.

Una partícula en movimiento experimenta un tiempo propio positivo a lo largo de su línea de mundo (su trayectoria a través del espaciotiempo). Sin embargo, esto es imposible dentro de la ergosfera, donde g_{tt} es negativo, a menos que la partícula esté corotando alrededor de la masa interior M con una velocidad angular de, al menos, Ω . Así, ninguna partícula puede moverse en la dirección opuesta a la rotación de la masa central dentro de la ergosfera.

Al igual que con el horizonte de sucesos en la métrica de Schwarzschild, la aparente singularidad en r_{H} se debe a la elección de las coordenadas (es decir, es una singularidad de coordenadas).

De hecho, el espaciotiempo puede continuar suavemente a través de ella mediante una elección adecuada de coordenadas. A su vez, el límite exterior de la ergosfera en r_E tampoco es singular por sí mismo, ni siquiera en coordenadas de Kerr, debido al término $dtd\phi$ no nulo.

Vectores y horizontes de Killing

Un campo vectorial X cualquiera es un campo de Killing si la derivada de Lie con respecto a X de la métrica g desaparece

$$\mathcal{L}_X g = 0. \quad (6.9)$$

Recordemos que la derivada de Lie evalúa el cambio de un campo tensorial (incluyendo funciones escalares, campos vectoriales y covectores), a lo largo del flujo definido por otro campo vectorial. Este cambio no depende de las coordenadas y, por lo tanto, la derivada de Lie se define en cualquier variedad diferenciable.

En términos de la conexión Levi-Civita, esta última ecuación equivale a

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0 \quad (6.10)$$

para todos los vectores Y y Z . En coordenadas locales, esto equivale a la ecuación de Killing

$$\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0. \quad (6.11)$$

Como esta condición está expresada en forma covariante, basta con establecerla en un sistema de coordenadas preferente para que se cumpla en todos los sistemas de coordenadas.

Por lo tanto, un campo vectorial de Killing es un campo vectorial sobre una variedad riemanniana (o pseudo-riemanniana) que preserva la métrica. Los campos de Killing son los generadores infinitesimales de isometrías; es decir, los flujos generados por los campos de Killing son isometrías continuas de la variedad. Más sencillamente, el flujo genera una simetría, en el sentido de que mover cada punto de un objeto la misma distancia en la dirección del vector de Killing no distorsionará las distancias en el objeto.

Un ejemplo podría ser un campo vectorial sobre un círculo que apunte en el sentido de las agujas del reloj y que tenga la misma longitud en cada punto. Es un campo vectorial de Killing porque mover cada punto del círculo a lo largo de este campo vectorial simplemente lleva a rotar el círculo. Las distancias se preservan, la métrica no varía.

Leyes de conservación: El primer teorema de Nöther

El primer teorema de Nöther afirma que toda simetría diferenciable de la acción de un sistema físico con fuerzas conservativas tiene su correspondiente ley de conservación. El teorema fue demostrado por Emmy Nöther en 1915 y publicado en 1918, después de que E. Cosserat y F. Cosserat demostraran un caso especial en 1909.

La acción de un sistema físico es la integral en el tiempo de una función lagrangiana, a partir de la cual se puede determinar el comportamiento del sistema por el principio de mínima acción. Es muy importante recalcar que *el teorema sólo se aplica a simetrías continuas y suaves sobre el espacio físico*.

Es decir, existe una relación íntima entre las leyes de conservación y determinadas transformaciones matemáticas del sistema físico en cuestión (que llamaremos "simetrías"). Por eso, a cada "simetría del sistema" le corresponde una y sólo una cantidad conservada (a lo que llamamos un invariante). Por si fuera poco, el teorema es tan potente que nos permite calcular cuál es ese invariante.

Este concepto de "simetría" de un sistema físico se le puede explicar al alumnado a través de ejemplos. Es muy importante recurrir continuamente a los ejemplos para que los estudiantes se puedan formar una imagen intuitiva de qué quiere decir la teoría que se da en clase, para que la exposición abstracta de la misma no les imponga.

Por ejemplo, un sistema tiene simetría de traslación si al desplazarlo cierta longitud se mantiene igual, o tiene simetría de rotación si al girarlo cierto ángulo también queda igual. Con el teorema de Nöther podemos asociar la simetría de traslación con la conservación del momento lineal o cantidad de movimiento: si el sistema tiene simetría de traslación la cantidad de movimiento será un invariante de ese sistema.

Esto quiere decir que existe una correspondencia uno a uno entre cada una de ellas y una simetría diferenciable de la naturaleza. Por ejemplo, la conservación de la energía se desprende de la invariabilidad temporal de los sistemas físicos, y la conservación del momento angular surge del hecho de que los sistemas físicos se comportan igual con independencia de su orientación en el espacio.

Un ejemplo práctico para desarrollar con los estudiantes es, por ejemplo, el de la conservación de la energía. Consideremos el caso concreto de una partícula newtoniana de masa m , de coordenadas x , que se mueve bajo la influencia de un potencial V , coordinado por el tiempo t . La acción, S , es:

El primer término entre paréntesis es la energía cinética de la partícula, mientras que el segundo es su energía potencial. Consideremos el generador de traslaciones temporales $Q[x(t)] = \dot{x}(t)$. La coordenada x tiene una dependencia explícita del tiempo, mientras que V no la tiene; en consecuencia

$$Q[L] = \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 - V(x) \right] = m \sum_i \dot{x}_i \ddot{x}_i - \sum_i \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (6.12)$$

Por lo tanto,

$$L = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 - V(x), \quad (6.13)$$

de forma que

$$j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} Q[x_i] - L = m \sum_i \dot{x}_i^2 - \left[\frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 - V(x) \right] = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 + V(x). \quad (6.14)$$

El lado derecho es la energía, y el teorema de Nöther establece que $dj/dt = 0$. Es decir, el principio de conservación de la energía es una consecuencia de la invariancia bajo traslaciones temporales.

De forma más general, si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, la cantidad

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - L \quad (6.15)$$

se conserva. Esta cantidad se denomina el hamiltoniano del sistema.

El teorema de Nöther se utiliza en la física teórica y en el cálculo de variaciones. Es una generalización de las formulaciones sobre las constantes de movimiento en la mecánica lagrangiana y hamiltoniana (desarrolladas en 1788 y 1833, respectivamente), pero no se aplica a los sistemas que no pueden modelarse sólo con una lagrangiana (por ejemplo, los sistemas con una función de disipación de Rayleigh). En particular, los sistemas disipativos con simetrías continuas no necesariamente tienen una ley de conservación correspondiente.

Hipersuperficies

En geometría, una hipersuperficie es una generalización de los conceptos de hiperplano, curva plana y superficie. Más concretamente, una hipersuperficie es una variedad algebraica de dimensión $n - 1$, que está contenida en un espacio de dimensión n , generalmente (pero no necesariamente) un espacio euclidiano, un espacio afín o un espacio proyectivo. Las hipersuperficies comparten, con las superficies de un espacio tridimensional, la propiedad de estar definidas por una única ecuación implícita, al menos localmente (cerca de cada punto), y a veces incluso globalmente.

Una hipersuperficie en un espacio (euclidiano, afín o proyectivo) de dimensión dos es una curva plana. En un espacio de dimensión tres, es una superficie. Por ejemplo, la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0 \quad (6.16)$$

define una hipersuperficie algebraica de dimensión $n - 1$ en el espacio euclidiano de dimensión n . Esta hipersuperficie es también una variedad suave, y se denomina hiperesfera o “esfera $(n - 1)$ ”¹.

Este es un ejemplo interesante para explicar el concepto de hipersuperficie a los estudiantes, y se detallará con ese objetivo. Generalizando (aunque sea un ejemplo), una esfera n o una hiperesfera es un espacio topológico homeomorfo a una esfera n clásica.

Esta es el conjunto de puntos del espacio euclidiano $(n + 1)$ que están situados a una distancia constante r de un punto fijo, llamado “centro”. Es la generalización de una esfera ordinaria en el espacio tridimensional ordinario. El “radio” de una esfera es la distancia constante de sus puntos al centro. Cuando la esfera tiene un radio unitario, es habitual llamarla esfera n unitaria o simplemente “esfera n ” por brevedad.

En términos de norma estándar, la esfera n se define como

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}, \quad (6.17)$$

y una esfera n de radio r puede definirse como

$$S^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = r\}. \quad (6.18)$$

La dimensión de la esfera n es n , y no debe confundirse con la dimensión $(n + 1)$ del espacio euclidiano en el que “reside”. Una esfera n es la superficie o el límite de una bola de $(n + 1)$ dimensiones.

Al igual que una proyección estereográfica puede proyectar la superficie de una esfera en un plano, también puede proyectar una esfera 3 en el espacio 3, como podemos ver en la figura 6.10.

Para $n \leq 2$, las esferas n que son variedades diferenciales pueden caracterizarse (salvo un difeomorfismo) como las variedades n -dimensionales simplemente conexas de curvatura constante y positiva.

Hay que enfatizar aquí la naturaleza matemática de este “salvo”, que no corresponde al de la conjunción, sino más bien a lo contrario, por su carácter no exclusivo, sino inclusivo. Matemáticamente, dos objetos cualesquiera a y b son iguales salvo una relación de equivalencia R si a y b están relacionados por R . Es decir, aRb se cumple, lo que implica que las clases de equivalencia de a y b con respecto a R son iguales.

Esta figura retórica se utiliza sobre todo en relación con expresiones derivadas de la igualdad, como la unicidad o el recuento. Por ejemplo, decir que “ x es único salvo por R ”

¹Evito explícitamente aquí la notación usual de $(n - 1)$ —esfera por considerarla una forma gramatical inglesa, ajena a nuestra vernáculo.

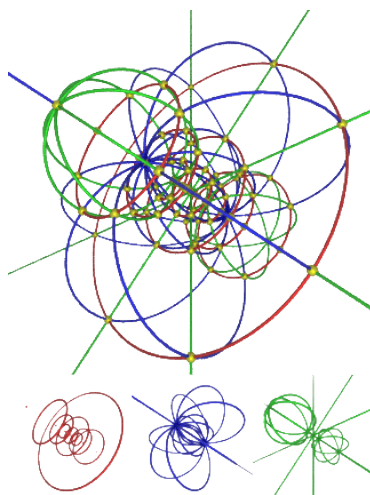


Figura 6.10: Esta imagen muestra tres direcciones de coordenadas proyectadas al espacio 3: paralelos (rojo), meridianos (azul) e hipermeridianos (verde). Debido a la propiedad conforme de la proyección estereográfica, las curvas se cruzan ortogonalmente (en los puntos amarillos) como en 4D. Todas las curvas son círculos: las curvas que se cruzan $(0, 0, 0, 1)$ tienen un radio infinito (una línea recta), [20].

significa que todos los objetos x considerados están en la misma clase de equivalencia con respecto a la relación R .

Finalmente, es interesante mencionar que las esferas n admiten otras descripciones topológicas. Por ejemplo, pueden construirse pegando dos espacios euclidianos de dimensiones n , identificando la frontera de un cubo n con un punto, o (inductivamente) formando la suspensión de una esfera $(n-1)$. La esfera 1 es la variedad diferencial 1 que corresponde a un círculo y que, como sabemos, no es simplemente conexo. La esfera 0 es la variedad diferencial 0, tampoco simplemente conexa, ya que consiste de dos puntos.

Una hipersuperficie que es a su vez una variedad diferencial lisa se llama hipersuperficie lisa. En $\mathbb{R}^n$, una hipersuperficie lisa es orientable.

La orientabilidad es una propiedad de algunos espacios topológicos, como los espacios vectoriales reales, los espacios euclidianos, las superficies y, más en general, las variedades, que permite una definición coherente de orientación en el sentido de las agujas del reloj y en el antihorario.

Un espacio es orientable si existe tal definición coherente. En este caso, hay dos definiciones posibles, y la elección de una es una orientación del espacio. Los espacios vectoriales reales, los espacios euclidianos y las esferas son orientables. Un espacio es no orientable si en el sentido de las agujas del reloj se convierte en su sentido antihorario después de describir algunos bucles en él y volver al punto de partida. Esto significa que una forma geométrica como, por ejemplo, este pequeño círculo coloreado , si se mueve continua-

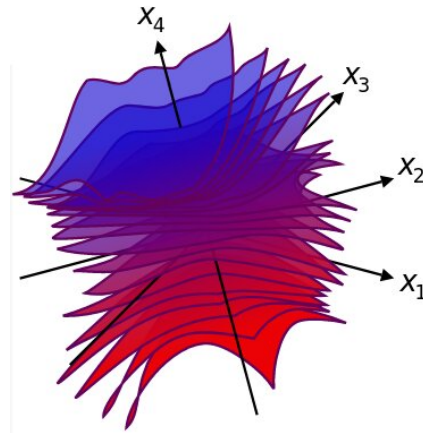


Figura 6.11: Superficies curvas en cortes constantes de $x_4 = f(x_1, x_2, x_3)$.

mente (es decir, si gira) a lo largo de un bucle (la distancia necesaria en la recta) de este tipo llegará a su propia imagen especular, .

Toda hipersuperficie lisa compacta conectada es un conjunto de nivel, y separa $\mathbb{R}^n$ en dos componentes conexas. La matización es importante, y cabe recalcar al alumnado que el conjunto de niveles de una función de valor real f de n variables reales es un conjunto donde la función toma un valor constante dado c , es decir:

$$L_c(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}. \quad (6.19)$$

Cuando el número de variables independientes es dos, un conjunto de nivel se denomina curva de nivel, también conocida como curva de contorno o isolínea. Por lo tanto, una curva de nivel es el conjunto de todas las soluciones de valor real de una ecuación en dos variables x_1 y x_2 .

Cuando $n = 3$, un conjunto de nivel se llama superficie de nivel (o isosuperficie). De esta forma, obviamente, una superficie de nivel es el conjunto de todas las raíces de valor real de una ecuación en tres variables x_1 , x_2 y x_3 . Para valores superiores de n , el conjunto de niveles es una hipersuperficie de niveles, el conjunto de todas las raíces de valor real de una ecuación en $n > 3$ variables. En la figura 6.11 podemos ver un conjunto de niveles $(n - 1)$ de una función no lineales en el espacio euclidiano $(n + 1)$, para $n = 1, 2, 3$. Un conjunto de niveles es un caso especial de una fibrado.

Horizontes de Killing

Un horizonte de Killing es una construcción geométrica utilizada en la relatividad general y sus generalizaciones para delinear los límites del espaciotiempo. La ventaja es que no tenemos que hacer referencia a las ecuaciones de campo dinámicas de Einstein. Esto

no es una coincidencia, sino una consecuencia de la naturaleza geométrica de la teoría de relatividad general.

Matemáticamente, un horizonte de Killing es una hipersuperficie nula; es decir, una hipersuperficie cuyo vector normal en cada punto de la misma es un vector nulo. Este vector debe tener longitud cero con respecto al tensor métrico local. Un cono de luz es un ejemplo. Una caracterización alternativa es que el espacio tangente en cada punto de una hipersuperficie contiene un vector no nulo tal que la métrica aplicada a dicho vector y a cualquier vector del espacio tangente es cero.

El horizonte de Killing es, por lo tanto, una hipersuperficie definida por la desaparición de la norma del campo vectorial (de Killing). También puede definirse como una hipersuperficie nula generada por un vector de Killing, que a su vez es nulo en esa superficie.

Lo interesante es que hay una relación directa entre la geometría del espaciotiempo a través de los horizontes de Killing y los efectos térmicos de los campos cuánticos: Hawking demostró que la teoría cuántica de campos predice que un agujero negro formado por colapso gravitatorio tiene que emitir radiación térmica.

Simetrías del espaciotiempo

Una vez presentados todos los puntos anteriores al alumnado, podemos pasar a un problema más pragmático en el estudio de la física de los agujeros negros, que trata de las simetrías del espaciotiempo cuando hay una curvatura importante, o ninguna.

Las simetrías del espaciotiempo son características del mismo que nos pueden ayudar a la hora de intentar resolver un problema físico. Es decir, estas simetrías nos pueden ayudar para simplificar el problema y, así, hallar las soluciones a muchos problemas.

Las simetrías espaciotemporales se utilizan en el estudio de las soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein de la relatividad general. Las simetrías espaciotemporales se distinguen de las simetrías internas.

Los problemas físicos se investigan y se resuelven a menudo observando características que presentan alguna forma de simetría. Por ejemplo, en la solución de Schwarzschild, el papel de la simetría esférica es importante para derivar la solución que lleva el mismo nombre y deducir las consecuencias físicas de esta simetría. Una de ellas es la inexistencia de radiación gravitacional en una estrella esféricamente pulsante.

En los problemas cosmológicos, la simetría restringe el tipo de universos que son coherentes con las observaciones a gran escala (por ejemplo, la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker).

Las simetrías suelen requerir algún tipo de propiedad de preservación. En relatividad general, las más importantes conllevan la preservación de

- (i) las geodésicas del espaciotiempo,
- (ii) del tensor de la métrica y la

(iii) del tensor de curvatura.

Estas y otras simetrías se discutirán con más detalle durante el curso. Esta propiedad de preservación que suelen poseer las simetrías (a la que se ha aludido anteriormente) puede utilizarse para motivar una definición útil de estas mismas simetrías.

Hall [21], en su Secc. (1.10) da una definición rigurosa de las simetrías en relatividad general. En este enfoque, la idea es utilizar campos vectoriales ("suaves" o diferenciables, claro) cuyos difeomorfismos de flujo local (es decir, un mapa entre variedades lisas que preserva la estructura local diferenciable) preserven alguna propiedad del espaciotiempo. Hay que hacer hincapié en que se trata de un difeomorfismo; es decir, una transformación sobre un elemento diferencial. La implicación es que el comportamiento de los objetos con extensión puede no ser tan manifiestamente simétrico.

Se dice que un campo vectorial suave X en un espaciotiempo M preserva un tensor suave T en M (o que " T es invariante bajo X ") si, para cada difeomorfismo de flujo local suave ϕ_t asociado a X , los tensores T y $\phi_t^*(T)$ son iguales en el dominio de ϕ_t . Esta afirmación es equivalente a la condición de que la derivada de Lie del tensor bajo el campo vectorial desaparece, como se le presenta al alumnado en un punto anterior,

$$\mathcal{L}_X T = 0. \quad (6.20)$$

Un **campo vectorial de Killing** es uno de los tipos más importantes de simetrías y se define como un campo vectorial suave X que preserva el tensor métrico g :

$$\mathcal{L}_X g = 0. \quad (6.21)$$

Esto se suele escribir de forma expandida como

$$X_{a;b} + X_{b;a} = 0. \quad (6.22)$$

Los campos vectoriales de Killing tienen amplias aplicaciones (incluso en la mecánica clásica) y están relacionados con las leyes de conservación.

Un **campo vectorial homotético** es aquel que cumple

$$\mathcal{L}_X g = 2cg, \quad (6.23)$$

donde c es una constante real. Estos campos vectoriales encuentran aplicación en el estudio de las singularidades en la relatividad general.

Un **campo vectorial afín** satisface la condición:

$$(\mathcal{L}_X g)_{ab;c} = 0 \quad (6.24)$$

Un campo vectorial afín preserva las geodésicas y preserva el parámetro afín.

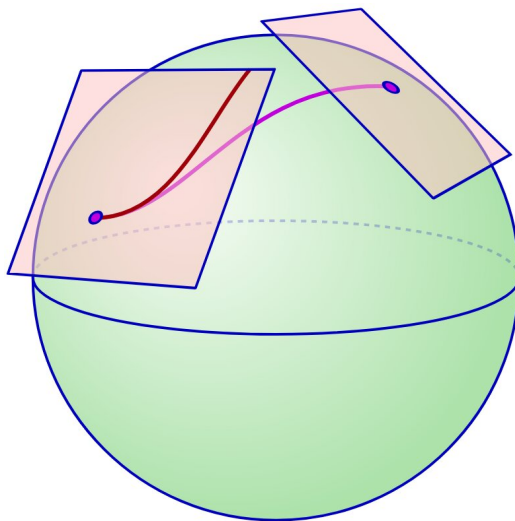


Figura 6.12: Una conexión afín en la esfera hace rodar el plano tangente afín de un punto a otro. Al hacerlo, el punto de contacto traza una curva en el plano [22].

Es decir, una geodésica en una variedad suave M con una conexión afín ∇ se define como una curva $\gamma(t)$ tal que el transporte paralelo a lo largo de la curva preserva el vector tangente a la curva, por lo que

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0. \quad (6.25)$$

en cada punto de la curva, donde $\dot{\gamma}$ es la derivada respecto a t . De forma más precisa, para definir la derivada covariante $\dot{\gamma}$ primero tenemos que extender $\dot{\gamma}$ a un campo vectorial continuamente diferenciable en un conjunto abierto. El resultado, sin embargo, no depende de cómo elijamos tal extensión. Podemos ilustrar qué es una conexión afín con la figura 6.12.

Los tres tipos de campos vectoriales anteriores son casos especiales de **campos vectoriales proyectivos** que preservan las geodésicas sin preservar necesariamente el parámetro afín.

Un campo vectorial conforme es aquel que cumple

$$\mathcal{L}_X g = \phi g, \quad (6.26)$$

donde ϕ es una función suave de valor real sobre M .

Una colineación de curvatura es un campo vectorial que preserva el tensor de Riemann:

$$\mathcal{L}_X R^a{}_{bcd} = 0 \quad (6.27)$$

donde $R^a{}_{bcd}$ son las componentes del tensor de Riemann. El conjunto de todas las colina-

ciones de curvatura suaves forma un álgebra de Lie bajo la operación de corchetes de Lie (si se elimina la condición de suavidad, el conjunto de todas las colineaciones de curvatura no necesita formar un álgebra de Lie). El álgebra de Lie se denota por $CC(M)$ y puede ser de dimensión infinita. Todo campo vectorial afín es una colineación de curvatura.

Una forma menos conocida de simetría se refiere a los campos vectoriales que preservan el tensor energía-momento. Se denominan **colineaciones o simetrías de la materia** y se definen por:

$$\mathcal{L}_X T = 0, \quad (6.28)$$

donde T es el tensor covariante de energía-momento. Aquí puede destacarse la íntima relación entre la geometría y la física, ya que se considera que el campo vectorial X preserva ciertas cantidades físicas a lo largo de las líneas de flujo de X , siendo esto cierto para dos observadores cualesquiera.

En relación con esto último, puede demostrarse que todo campo vectorial de Killing es una colineación de materia (por las ecuaciones de campo de Einstein, con o sin constante cosmológica).

Así, dada una solución de las ecuaciones de campo de Einstein, un campo vectorial que preserve la métrica necesariamente preserva el correspondiente tensor de energía-momento.

Cuando el tensor de energía-momento representa un fluido perfecto, todo campo vectorial de Killing preserva la densidad de energía, la presión y el campo vectorial de flujo del fluido. Cuando el tensor de energía-momento representa un campo electromagnético, un campo vectorial de Killing no preserva necesariamente los campos eléctrico y magnético.

La clasificación de soluciones constituye una gran parte de la investigación hecha en relatividad general. Varios enfoques para clasificar los espaciotiempos, incluyendo el uso de la clasificación de Segre ² del tensor de energía-momento o la clasificación de Petrov del tensor de Weyl, han sido estudiados ampliamente por muchos investigadores.

Hay que dejar claro al alumnado que también es posible clasificar los espaciotiempos utilizando campos vectoriales de simetría (especialmente las simetrías de Killing y homotéticas).

Por ejemplo, los campos vectoriales de Killing pueden utilizarse para clasificar los espaciotiempos, ya que existe un límite en el número de campos vectoriales de Killing globales y suaves que puede poseer un espaciotiempo (el máximo es 10 para los espaciotiempos de cuatro dimensiones).

En general, cuanto mayor es la dimensión del álgebra de campos vectoriales de simetría de un espaciotiempo, más simetría admite el espaciotiempo. Por ejemplo, la solución

²Esta es una clasificación algebraica de tensores simétricos de rango dos. Los tipos resultantes se conocen como tipos de Segre. Se aplica más comúnmente al tensor de energía-momento (o al tensor de Ricci) y encuentra aplicación principalmente en la clasificación de soluciones exactas en relatividad general.

de Schwarzschild tiene un álgebra de Killing de dimensión 4 (tres campos vectoriales de rotación espacial y una traslación temporal), mientras que la métrica de Friedmann, Lemaître, Robertson y Walker (excluyendo el subcaso estático de Einstein) tiene un álgebra de Killing de dimensión 6 (tres traslaciones y tres rotaciones). La métrica estática de Einstein tiene un álgebra de Killing de dimensión 7 (las 6 anteriores más una traslación temporal).

Unicidad de los agujeros negros

Hace casi sesenta años desde la presentación del primer teorema sobre la unicidad de los agujeros negros [23]. El autor, Israel, presentó una clase de soluciones estáticas asintóticamente planas de las ecuaciones de campo del vacío de Einstein.

Las soluciones tenían horizontes de sucesos regulares, y obedecían el tipo de condiciones de regularidad correspondiente a una amplia clase de métricas de agujeros negros en equilibrio y sin espín. El autor coligió que la clase se limitaba a la familia de métricas de Schwarzschild de masa positiva. Es decir, es la única posible solución en un universo como el nuestro. Ningún otro objeto puede cumplir esas condiciones. Es importante que el alumnado comprenda las conclusiones de un trabajo tan importante: De todas las posibles soluciones que uno podría pensar que pudieren existir, sólo una es correcta. Sólo una describe qué es un agujero negro sin rotación. Las consecuencias son muy trascendentes y nos ayudan a comprender mejor qué es este tipo de objeto exótico.

Este primer paso dio lugar a otros, y a un esfuerzo que hoy en día sigue siendo actual e igualmente interesante. Los pasos inmediatos se concentraron en el contexto astrofísico del colapso gravitatorio. Inicialmente el foco de atención fueron los agujeros negros estáticos o estacionarios en cuatro dimensiones. Objetos puramente gravitacionales. Sin embargo, poco a poco se empezaron a estudiar otras configuraciones, añadiendo capas de complejidad a lo que, en realidad, es un objeto muy sencillo que se puede describir completamente con meramente tres números.

La teoría de cuerdas y la cosmología nos han ayudado e incitado el estudio de la unicidad en el contexto de agujeros negros en más dimensiones de las que conocemos, así como en presencia de materia.

Es interesante leer el artículo de Israel en la publicación [24], en la que explica cómo llegó a esa idea y cuáles fueron las implicaciones de la misma, no sólo en otros trabajos, sino en el suyo propio. Más adelante, el mismo autor extendió su trabajo de unicidad de soluciones a los espaciotiempos “electrovacíos” [25]. Este término se refiere a una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein en la que la única masa-energía no gravitatoria presente es la energía de campo de un campo electromagnético. Esta debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell (en un espaciotiempo curvo) libres de fuente. Por esta razón, los espaciotiempos “electrovacíos” se denominan a veces soluciones de Einstein-Maxwell (sin fuente).

El autor demostró que las únicas posibles soluciones para la familia de métricas que

buscaba eran de la familia Reissner-Nordström, con carga eléctrica. El resultado, aunque esperable, conllevó un gran esfuerzo que extendía su primer teorema. Es importante hacerle notar al alumnado que no es lo mismo tener la intuición de que “debe de ser así” y que lo sea, probado de forma matemática. Cuando se publicó este teorema de unicidad, ya se sabía lo suficiente sobre la solución de Kerr como para poder preguntar si en el caso independiente del tiempo pero considerando el espín, podría llegar a existir también un resultado similar en cuanto a unicidad. ¿Podría darse que hubiera un solo tipo de solución para esta forma de agujero negro? Esta fue la denominada “conjetura Carter-Israel”; las soluciones de Kerr-Newman con $a^2 + e^2 + p^2 \leq m^2$ deberían de ser las únicas posibles. Es decir, el espaciotiempo alrededor de un objeto que ha colapsado gravitacionalmente debería de (en el sentido de la perífrasis “debe de” y no “debe”, “tiene que”) aproximarse asintóticamente en el tiempo a la solución de Kerr o de Kerr-Newman. Cabe recalcar aquí el papel de que desempeñó Wheeler con sus resultados [26] respecto al hecho de que los agujeros negros “no deben tener pelo”, así como el trabajo de Penrose que llevó a su artículo de mil novecientos sesenta y nueve [27].

Una de las cuestiones más interesantes que examinaba el autor en este último trabajo era si las singularidades que se forman como resultado del colapso gravitatorio están siempre ocultas tras un horizonte de sucesos. Planteó la cuestión de la existencia de un “censor cósmico” que prohibiría la aparición de singularidades “desnudas”; es decir, no ocultas por un horizonte de sucesos. Este es un tema muy interesante sobre el que se podría elaborar mucho en el contexto de los diagramas conformes que hemos presentado antes al alumnado, así como la llamada catástrofe del infrarrojo y el reciente trabajo que se ha hecho en cuestiones relacionadas con el horizonte de Cauchy.

En esta parte del curso se hará hincapié al alumnado sobre la importancia de estas soluciones y sobre qué significa que las mismas existan.

Integrales de Komar

El concepto de masa en relatividad, en particular en relatividad general, es mucho más complejo de lo que el alumnado podría esperar. Es interesante, por ejemplo, observar su reacción al explicarles que la solución de Schwarzschild de un agujero negro lleva a una curvatura infinita en la singularidad en la ausencia de masa. Esto se debe a la asociación de masa con curvatura, como si estos dos fueran palabras o conceptos sinónimos, cuando no lo son.

En este sentido, el teorema de Nöther es de particular importancia para explicarle al alumnado cómo derivar una masa a partir de un diagrama conforme, integrando de lado a lado el espaciotiempo en una isocrona.

Aunque esta derivación de masa resulte intuitiva, en realidad es imposible encontrar una definición general de la masa (o energía) total de un sistema en relatividad general. La razón principal es que la energía del campo gravitatorio no forma parte del tensor de

energía-momento; en cambio, lo que podría identificarse como la contribución del campo gravitatorio a la energía total forma parte del tensor de Einstein. Es decir, es una consecuencia del hecho de que estas ecuaciones no sean lineales.

Es importante recalcarle al alumnado que, aunque en principio se podrían reescribir las ecuaciones para que lo que se pudiese identificar como “energía gravitatoria” estuviese agrupado con los otros términos fuente en forma de pseudotensor, esta separación depende del observador. Es decir, no es invariante.

En este caso nos ayuda la masa de Komar (llamada así por Arthur Komar), que puede definirse en cualquier espaciotiempo estacionario. Es decir, en un espaciotiempo en el que todas las componentes métricas pueden escribirse de forma que sean independientes del tiempo. Alternativamente, un espaciotiempo estacionario puede definirse como un espaciotiempo que posee un campo vectorial de Killing semejante al tiempo.

Consideremos la métrica de Schwarzschild. Utilizando la base de Schwarzschild, un campo marco para la métrica de Schwarzschild, se puede encontrar que la aceleración radial requerida para mantener una masa de prueba estacionaria en una coordenada de Schwarzschild de r es

$$a^{\hat{r}} = \frac{m}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2m}{rc^2}}}. \quad (6.29)$$

Como la métrica es estática, existe un significado bien definido para “mantener una partícula de forma estacionaria”. Interpretando esta aceleración como debida a una fuerza gravitatoria, podemos entonces calcular la integral de la aceleración normal multiplicada por el área para obtener una integral de la “ley de Gauss” de:

$$\frac{4\pi m}{\sqrt{1 - \frac{2m}{rc^2}}}, \quad (6.30)$$

Si bien esto se aproxima a una constante a medida que r se acerca al infinito, no es una constante independiente de r . Por lo tanto, todo parece indicar que tenemos que introducir un factor de corrección para hacer que la integral anterior sea independiente de r . Para la métrica de Schwarzschild, este factor de corrección es simplemente $\sqrt{g_{tt}}$, el factor de desplazamiento al rojo o de la dilatación temporal a la distancia r . También se puede interpretar este factor como un desplazamiento de la fuerza local a la fuerza en el infinito. Este concepto correspondería a una fuerza que un observador en el infinito necesitaría aplicar a través de una cuerda para mantener la partícula estacionaria.

Para continuar, escribiremos un elemento de línea para una métrica estática.

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + \text{forma cuadrática de } (dx \, dy \, dz), \quad (6.31)$$

donde g_{tt} y la forma cuadrática son funciones sólo de las coordenadas espaciales x, y, z y no

del tiempo. A pesar de la elección de los nombres de las variables, es importante recordarle al alumnado que no se debe suponer que nuestro sistema de coordenadas es cartesiano. El hecho de que ninguno de los coeficientes métricos sea función del tiempo hace que la métrica sea estacionaria. Por otra parte, el hecho adicional de que no haya términos cruzados que impliquen tanto componentes temporales como espaciales (como $dx dt$) la hace estática.

Debido a la suposición simplificadora de que algunos de los coeficientes métricos son cero, algunos de estos resultados no serán tan generales como podrían ser.

En el espacio-tiempo plano, la aceleración propia requerida para mantener la estación es

$$a^b = \nabla_u u^b = u^c \nabla_c u^b, \quad (6.32)$$

donde u^b es un vector temporal unitario tal que $u^b u_b = -1$.

La componente del vector de aceleración normal a la superficie es

$$a_{\text{norm}} = N^b a_b, \quad (6.33)$$

donde N^b es un vector unitario normal a la superficie. En un sistema de coordenadas de Schwarzschild, por ejemplo, encontramos que

$$N^b a_b = \frac{\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} c^2}{2g_{tt} \sqrt{g_{rr}}} = \frac{m}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2m}{rc^2}}}, \quad (6.34)$$

como era de esperar. Lo único que hemos hecho ha sido reformular los resultados anteriores en una base de coordenadas. Definimos $a_{\text{inf}} = \sqrt{g_{tt}} a$, por lo que en nuestro ejemplo de Schwarzschild $N^b a_{\text{inf}b} = m/r^2$.

Ahora podemos, si lo deseamos, derivar las aceleraciones a_b y la aceleración en el infinito ajustada a $a_{\text{inf}b}$ a partir de un potencial escalar Z , aunque no hay necesariamente ninguna ventaja particular en hacerlo.

$$a_b = \nabla_b Z_1 \quad Z_1 = \ln g_{tt} \quad (6.35)$$

Se puede demostrar que, integrando la componente normal de la aceleración en el infinito sobre una superficie límite, obtenemos una cantidad que no depende de la forma de la esfera que la encierre. Por lo tanto, podemos calcular la masa contenida por una esfera mediante la integral

$$m = -\frac{1}{4\pi} \int_A N^b a_{\text{inf}b} dA \quad (6.36)$$

Para hacer esta demostración, necesitamos expresar esta integral de superficie como

una integral de volumen. En el espaciotiempo plano, utilizaríamos el teorema de Stokes e integraríamos $-\nabla \cdot a$ ínf sobre el volumen. En un espaciotiempo curvo, como cabe esperar, este enfoque debe modificarse.

Utilizando las fórmulas del electromagnetismo en el espaciotiempo curvo como guía, escribimos en su lugar

$$F_{ab} = a \text{ ínf}_a u_b - a \text{ ínf}_b u_a, \quad (6.37)$$

donde F juega un papel similar al tensor de Faraday, en el sentido de que $a \text{ ínf}_a = F_{ab} u^b$. Entonces podemos encontrar el valor de la "carga gravitacional", es decir, la masa, evaluando $\nabla^a F_{ab} u^b$ e integrándolo sobre el volumen de dicha esfera.

Un enfoque alternativo sería utilizar formas diferenciales. Un cálculo largo, pero sencillo a partir del elemento de línea nos muestra que

$$-u^b \nabla^a F_{ab} = \sqrt{g_{tt}} R_{00} u^a u^b = \sqrt{g_{tt}} R_{ab} u^a u^b. \quad (6.38)$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$m = \frac{\sqrt{g_{tt}}}{4\pi} \int_V R_{ab} u^a u^b \quad (6.39)$$

En cualquier región de del espaciotiempo vacío, todas las componentes del tensor de Ricci deben ser cero. Esto demuestra que encerrar cualquier cantidad de vacío no cambiará nuestra integral de volumen. También significa que nuestra integral de volumen será constante para cualquier superficie envolvente, siempre que encerremos toda la masa gravitatoria dentro de nuestra superficie. Dado que el teorema de Stokes garantiza que nuestra integral de superficie es igual a la integral de volumen anterior, nuestra integral de superficie también será independiente de la superficie que la encierra, siempre y cuando la superficie encierre toda la masa gravitatoria.

Utilizando las ecuaciones de campo de Einstein

$$G^u_v = R^u_v - \frac{1}{2} R l^u_v = 8\pi T^u_v, \quad (6.40)$$

dejando $u=v$ y sumando, podemos demostrar que $R = -8\pi T$. Esto nos permite reescribir nuestra fórmula de la masa como una integral de volumen del tensor tensión-energía.

$$m = \int_V \sqrt{g_{tt}} (2T_{ab} - T_{g_{ab}}) u^a u^b dV, \quad (6.41)$$

con V el volumen sobre el que se integra; T_{ab} es el tensor de tensión-energía y u^a es un vector temporal unitario tal que $u^a u_a = -1$.

Termodinámica de agujeros negros

En física, la termodinámica de los agujeros negros es el área de estudio que trata de reconciliar las leyes de la termodinámica con la existencia de los horizontes de sucesos de los agujeros negros. Al igual que el estudio de la mecánica estadística de la radiación de los cuerpos negros condujo al desarrollo de la teoría de la mecánica cuántica, el esfuerzo por comprender la mecánica estadística de los agujeros negros ha tenido un profundo impacto en la comprensión de la gravedad cuántica, conduciendo a la formulación del principio holográfico.

La segunda ley de la termodinámica tradicional exige que los agujeros negros tengan entropía. Si los agujeros negros no tuvieran entropía, sería posible violar la segunda ley arrojando masa al interior del agujero negro. El aumento de la entropía del agujero negro compensa con creces la disminución de la entropía del objeto que desaparece en el horizonte de sucesos. Esto es lo que llevó en 1972 a Jacob Bekenstein a conjeturar que los agujeros negros debían tener entropía, y ese mismo año propuso varios teoremas relacionados con “la ausencia de pelo”.

La entropía del agujero negro es proporcional al área de su horizonte de sucesos. El hecho de que la entropía de los agujeros negros sea también la máxima entropía que puede obtenerse mediante el límite de Bekenstein (en el que el límite de Bekenstein se convierte en una igualdad) fue la principal observación que condujo al principio holográfico.

Esta relación de área se generalizó a regiones arbitrarias mediante la fórmula de Ryu-Takayanagi, que relaciona la entropía de entrelazamiento de una teoría de campo conforme de frontera con una superficie específica en su teoría gravitatoria dual.

Aunque los cálculos de Hawking aportaron más pruebas termodinámicas de la entropía de los agujeros negros, hasta 1995 nadie pudo realizar un cálculo controlado de la entropía de los agujeros negros basado en la mecánica estadística, que asocia la entropía con un gran número de microestados. De hecho, los llamados teoremas sin pelo parecían sugerir que los agujeros negros sólo podían tener un único microestado.

La situación cambió en 1995 cuando Andrew Strominger y Cumrun Vafa calcularon la entropía de Bekenstein-Hawking correcta de un agujero negro supersimétrico en la teoría de cuerdas, utilizando métodos basados en las D-branas y la dualidad de cuerdas. Su cálculo fue seguido por muchos cálculos similares de entropía de grandes clases de otros agujeros negros extremos y casi extremos, y el resultado siempre coincidió con la fórmula de Bekenstein-Hawking. Sin embargo, para el agujero negro de Schwarzschild, considerado como el agujero negro más alejado de lo extremo, no se ha caracterizado la relación entre los microestados y los macroestados. Todavía se intenta lograr una respuesta adecuada en el marco de la teoría de cuerdas.

En la gravedad cuántica de bucles es posible asociar una interpretación geométrica a los microestados. En esta, son las geometrías cuánticas del horizonte. La LQG ofrece una

explicación geométrica de la finitud de la entropía y de la proporcionalidad del área del horizonte.

Es posible derivar la relación correcta entre la energía y el área a partir de la formulación covariante de la teoría cuántica completa (spinfoam), así como la temperatura de Unruh y la distribución relacionada con la entropía de Hawking. El cálculo hace uso de la noción de horizonte dinámico y se realiza para agujeros negros no extremos.

El conjunto de microestados actualmente aceptado para los agujeros negros es el conjunto microcanónico. La función de partición para los agujeros negros da como resultado una capacidad calorífica negativa. Cuanto más calentemos el sistema, más se enfría y viceversa.

En los conjuntos canónicos, existe una limitación para una capacidad de calor positiva, mientras que los conjuntos microcanónicos pueden existir con una capacidad de calor negativa.

La ley cero es análoga a la ley cero de la termodinámica, que establece que la temperatura es constante en todo un cuerpo en equilibrio térmico. Sugiere que la gravedad superficial es análoga a la temperatura. La constante T para el equilibrio térmico para un sistema normal es análoga a κ constante sobre el horizonte de un agujero negro estacionario.

La primera ley es una declaración de conservación de la energía.

La segunda ley es el enunciado del teorema del área de Hawking. Análogamente, la segunda ley de la termodinámica establece que el cambio de entropía en un sistema aislado será mayor o igual a 0 para un proceso espontáneo, lo que sugiere una relación entre la entropía y el área de un horizonte de agujero negro. Sin embargo, esta versión viola la segunda ley de la termodinámica, ya que la materia pierde su entropía a medida que se adentra en el agujero negro, lo que da lugar a una disminución de la entropía. Sin embargo, la generalización de la segunda ley como la suma de la entropía del agujero negro y la entropía exterior, muestra que la segunda ley de la termodinámica no se viola en un sistema que incluye el universo más allá del horizonte.

La segunda ley de la termodinámica generalizada (GSL) era necesaria para presentar la segunda ley de la termodinámica como válida. Esto se debe a que la segunda ley de la termodinámica, como resultado de la desaparición de la entropía cerca del exterior de los agujeros negros, no es útil. La GSL permite la aplicación de la ley porque ahora es posible la medición de la entropía interior y común. La validez de la GSL puede establecerse estudiando un ejemplo, como el de un sistema con entropía que cae en un agujero negro más grande y sin movimiento, y estableciendo límites superiores e inferiores de entropía para el aumento de la entropía del agujero negro y de la

entropía del sistema, respectivamente. También hay que tener en cuenta que la GSL se mantiene para teorías de la gravedad como la gravedad de Einstein, la gravedad de Lovelock o la gravedad de Braneworld, porque se pueden cumplir las condiciones para utilizar la GSL en ellas.

Sin embargo, en el tema de la formación de agujeros negros, la cuestión es si la segunda ley generalizada de la termodinámica será válida o no, y si lo es, se habrá demostrado que es válida para todas las situaciones. Dado que la formación de un agujero negro no es estacionaria, sino que se mueve, demostrar que la GSL es válida es difícil. Para demostrar que la GSL es válida en general habría que utilizar la mecánica cuántica-estadística, porque la GSL es una ley tanto cuántica como estadística. Esta disciplina no existe, por lo que se puede suponer que la GSL es útil en general, así como para la predicción.

La tercera ley trata de los agujeros negros extremos. Estos tienen una gravedad superficial evanescente. Afirmar que κ no puede llegar a cero es análogo a la tercera ley de la termodinámica, que establece que la entropía de un sistema en el cero absoluto es una constante bien definida. Esto se debe a que un sistema a temperatura cero existe en su estado básico. Además, ΔS llegará a cero a temperatura cero, pero S también llegará a cero, al menos para las sustancias cristalinas perfectas. Todavía no se conocen violaciones de las leyes de la termodinámica verificadas experimentalmente.

Radiación de Hawking

La radiación

La radiación de Hawking es una radiación térmica que, según la teoría, se libera fuera del horizonte de sucesos de un agujero negro debido a efectos cuánticos relativistas. Lleva el nombre del físico Stephen Hawking, que desarrolló un argumento teórico para su existencia en 1974. La radiación Hawking es un efecto puramente cinemático que es genérico para las geometrías lorentzianas que contienen horizontes de sucesos u horizontes locales aparentes.

En este punto del curso, se le pedirá al alumnado aceptar que los agujeros negros pueden radiar. Idealmente se le haría una introducción que, en principio, se dejará fuera del curso aunque sea una de las cosas más interesantes por tratarse de la física de los objetos compactos. En estas notas, añado al final de este capítulo el apéndice 6.2 con el esquema de lo que se enseñaría, si hubiese tiempo para ello.

Una vez que el alumnado ha aceptado ciegamente que los agujeros negros pueden radiar, no es difícil estimar la longitud de onda de la radiación que emiten. La única escala de longitud en el problema es el tamaño del horizonte. Un fotón con una longitud de onda λ igual al radio del agujero negro (¿por qué?) tiene (ignorando la curvatura del espaciotiempo

en este simple argumento) un energía igual a

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = hc\frac{c^2}{2GM} = \frac{hc^3}{2GM}.$$

Si los agujeros negros son de hecho cuerpos negros, absorbiendo todo lo que cae sobre ellos y emitiendo luz, entonces su temperatura T debería estar al menos aproximadamente relacionada con esta energía a través de $E = kT$, lo que lleva a la siguiente estimación de la temperatura del agujero negro,

$$T = \frac{hc^3}{2kGM}.$$

Ahora bien, no se puede esperar que nuestro argumento sea exacto, ya que no teníamos ninguna razón para tomar la longitud de onda igual al radio del agujero en lugar de, digamos, su diámetro o circunferencia. Por otra parte, no podemos esperar que esta descripción capture los detalles de la teoría cuántica y de la curvatura del espaciotiempo. Estamos pensando de una forma clásica.

Sorprendentemente, esta respuesta es sólo un factor de $8\pi^2$ mayor que lo que Hawking encontró, lo que ahora se denomina la temperatura de Hawking,

$$T_H = \frac{hc^3}{16\pi^2 kGM} = 6 \times 10^{-8} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1} \text{ K}.$$

Esta es una cantidad ínfima de radiación para agujeros negros de masa estelar y supermasivos, de forma que no es relevante para la astrofísica. Sin embargo, es un resultado enorme para intentar comprender cómo casar la teoría cuántica y la gravedad. Esta teoría, si alguna vez llegamos a desarrollarla, debe predecir la temperatura de Hawking.

La radiación de Hawking reduce la masa y la energía de rotación de los agujeros negros y, por lo tanto, también se teoriza que causa la evaporación de los agujeros negros. Por ello, se espera que los agujeros negros que no ganan masa por otros medios se reduzcan y finalmente desaparezcan. Para todos los agujeros negros, excepto los más pequeños, esto ocurrirá muy lentamente. La temperatura de la radiación es inversamente proporcional a la masa del agujero negro, por lo que se predice que los microagujeros negros son mayores emisores de radiación que los agujeros negros más grandes y deberían disiparse más rápidamente.

Como se ha explicado al alumnado anteriormente, un agujero negro puede formarse cuando se comprime suficiente materia y/o energía en un volumen lo suficientemente pequeño como para que la velocidad de escape sea mayor que la de la luz. Nada puede viajar tan rápido, por lo que nada dentro de una distancia, proporcional a la masa del agujero negro, puede escapar más allá de esa distancia. La región más allá de la cual ni siquiera la luz puede escapar es el horizonte de sucesos; un observador que se encuentre fuera de él no puede observar, tomar conciencia o verse afectado por los sucesos dentro del horizonte de

sucesos. Esto se puede ver muy bien con un diagrama conforme, previamente explicado.

Alternativamente, utilizando un conjunto de coordenadas de inflexión en la relatividad general, se puede conceptualizar el horizonte de sucesos como la región más allá de la cual el espacio infla más rápido que la velocidad de la luz. Una vez que la materia está dentro del horizonte de sucesos, toda la materia que hay dentro cae inexorablemente en una singularidad gravitacional, un lugar de curvatura infinita, dejando atrás un espaciotiempo deformado y desprovisto de cualquier materia. Un agujero negro clásico es puro espaciotiempo vacío, y el más simple (no giratorio y sin carga) se caracteriza sólo por su masa y su horizonte de sucesos, como hemos visto antes.

Nuestros conocimientos actuales de la física cuántica pueden utilizarse para investigar lo que puede ocurrir en la región que rodea al horizonte de sucesos. En 1974 Stephen Hawking utilizó la teoría cuántica de campos en un espaciotiempo curvo para demostrar que la fuerza de la gravedad en el horizonte de sucesos era lo suficientemente fuerte como para provocar la emisión de radiación térmica y la fuga de energía hacia el universo más amplio desde una pequeña distancia alrededor y *fuera del horizonte de sucesos*. Esto quiere decir que esta energía actúa como si el propio agujero negro se evaporara lentamente (aunque en realidad procede del exterior).

Una diferencia importante entre la radiación de los agujeros negros calculada por Hawking y la radiación térmica emitida por un cuerpo negro es que esta última es de naturaleza estadística, y sólo su media satisface lo que se conoce como ley de Planck de la radiación de los cuerpos negros, mientras que la primera se ajusta mejor a los datos. Así, la radiación térmica contiene información sobre el cuerpo que la emite, mientras que la radiación de Hawking parece no contener dicha información, y depende únicamente de la masa, el momento angular y la carga del agujero negro. Esto conduce a la paradoja de la información de los agujeros negros.

Sin embargo, según la conjetura de la dualidad gauge-gravedad (también conocida como la correspondencia AdS/CFT), los agujeros negros en ciertos casos (y quizás en general) son equivalentes a soluciones de la teoría cuántica de campos a una temperatura distinta de cero. Esto significa que no se espera ninguna pérdida de información en los agujeros negros (ya que la teoría no permite tal pérdida) y la radiación emitida por un agujero negro es probablemente la radiación térmica habitual. Si esto es correcto, el cálculo original de Hawking debería corregirse, aunque no se sabe cómo.

Un agujero negro de una masa solar, como nuestro sol, tiene una temperatura de sólo 60 nanokelvins (60 mil millonésimas de kelvin); de hecho, un agujero negro así absorbería mucha más radiación cósmica de fondo de microondas de la que emite. Un agujero negro de la masa de la luna, con unos 133 μm de diámetro estaría en equilibrio a 2,7 K, absorbiendo tanta radiación como la que emite.

Luminosidad de Planck o Einstein

Para ejemplificar estos conceptos, es interesante pedirle al alumnado que calcule el tiempo necesario para que un agujero negro se evapore completamente. Sin embargo, antes es muy interesante explicarle a los estudiantes un nuevo concepto.

¿Cuál es el límite superior del poder, o luminosidad, de cualquier proceso? Dicho de otra forma, ¿cuál es la máxima potencia posible, o luminosidad, que cualquier evento puede producir en el universo?

La tasa de emisión de energía para todas las interacciones conocidas aumenta con la aceleración, que a su vez aumenta a medida que los cuerpos se acercan. Por lo tanto, no es extremadamente sorprendente que los posibles límites de las luminosidades estén relacionados con los principios de máxima tensión. Debido a que los agujeros negros representan el límite de la física de corta distancia, también se obtiene un enlace natural entre los límites de la luminosidad y la gravitación. En cuatro dimensiones del espacio-tiempo, hay una constante con dimensiones de luminosidad que se puede construir a partir de las constantes universales clásicas; esta es la luminosidad de Planck

Esta luminosidad controla los procesos gravitatorios; por lo tanto, no es de extrañar que la primera observación LIGO de una fusión de dos agujeros negros fuera el evento astrofísico más poderoso jamás detectado por la humanidad.

El requisito de que no haya un horizonte pasado en el espacio-tiempo parece limitar la luminosidad por debajo del valor de un determinado valor, al que llamamos la "luminosidad de Planck o Einstein".

Un simple experimento mental newtoniano revela cómo los agujeros negros regulan la luminosidad máxima. Considere un proceso con duración finita δt , que en algún momento produjo una radiación determinada de energía total Mc^2 contenida en una capa de espesor $\approx c\delta t$. Imaginemos ahora mentalmente el origen de esta radiación, yendo hacia el pasado, de forma que la capa poco a poco se va centrando en el punto en el que la gravedad propia domina. Para poder haber escapado de esa primera configuración, obviamente tenemos que requerir que no hubiera un horizonte en el sistema; es decir,

$$\frac{2GM}{c^2} \lesssim c\delta t. \quad (6.42)$$

De esto podemos colegir que la siguiente cantidad, que es una luminosidad (por análisis dimensional).

$$\mathcal{L} \simeq \frac{Mc^2}{\delta t} \lesssim \frac{\mathcal{L}_P}{2}. \quad (6.43)$$

esté limitada como lo expresa la propia ecuación.

Lo que nos está sugiriendo esta ecuación es que en el universo no puede haber ningún proceso que supere este límite, al que llamamos la "luminosidad de Einstein o de Planck".

Evaporación de agujeros negros

Cuando las partículas escapan, el agujero negro pierde una pequeña cantidad de su energía y, por tanto, parte de su masa (la masa y la energía están relacionadas por la ecuación de Einstein $E = mc^2$). En consecuencia, un agujero negro que se evapora tendrá una vida útil finita. Mediante un análisis dimensional, se puede demostrar que la vida de un agujero negro se escala como el cubo de su masa inicial. Hawking estimó que cualquier agujero negro formado en el universo primitivo con una masa inferior a aproximadamente 10^{15} g se habría evaporado completamente en la actualidad. En la figura 6.13 mostramos una ilustración ingenua de este proceso.

Como ejemplo para el alumnado, y parte preliminar a un ejercicio de este tema, calculemos ahora cuánto tarda un agujero negro en perder una parte importante de masa debido a la radiación de Hawking que acabamos de describir.

La temperatura de un agujero negro de Schwarzschild nos permite calcular la luminosidad de la fórmula estándar para un cuerpo negro, es decir,

$$L = \sigma AT^4$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann y A es el área de la superficie que irradia. En este caso, A es el horizonte, por lo que el área es el de una esfera de radio $2R_g$. Hay que recordar al alumnado que la coordenada radial en el caso de Schwarzschild es lo que mide la circunferencia de la esfera, no la distancia a su centro. Por lo tanto, el área de la esfera que es el horizonte viene dada por la fórmula usual para esferas, incluso si no sabemos cómo es el espacio dentro del horizonte. De este modo,

$$A = 4\pi (2R_g)^2 = 4\pi (2GM/c^2)^2 = (16\pi G^2/c^4) M^2.$$

Podemos reagrupar esto para obtener la luminosidad del agujero negro debido a esta radiación,

$$L_{BH} = \underbrace{\frac{1}{30720\pi^2}}_1 \underbrace{\frac{ch/G}{M^2}}_2 \underbrace{\frac{c^5}{G}}_3$$

Llegados a este punto, analizaremos con el alumnado el significado físico de los términos de esta expresión, para que no se olviden de que hay que mantener los pies en el suelo cuando hacemos astrofísica (o física, claro).

1. El primer factor es un número.
2. El segundo contiene la cantidad ch/G en el numerador. Esta cantidad es el cuadrado de la masa de Planck, por lo que no tiene dimensiones.



Figura 6.13: Una ilustración de la radiación de Hawking, ampliación de la figura 6.9.

3. El tercer factor corresponde a la luminosidad de Einstein o de Planck $\mathcal{L}_p$. El agujero negro se acerca a esta luminosidad cuando su masa es tan pequeña como la de Planck. Para un agujero negro normal de, digamos, $10 M_\odot$, el valor es tan pequeño como 10^{-30} W.

Por eso es importante hacer este análisis con los estudiantes: La vida útil de un agujero negro se puede definir como $Mc^2/\mathcal{L}_p$.

Sin embargo, este tiempo es una sobreestimación, ya que supone que la luminosidad será constante en tiempo, mientras que, en realidad, aumenta (por aumentar el agujero negro). Pero el aumento es gradual, por lo que la corrección es de un factor tres, es decir, la vida útil real es un tercio de esta estimación para una masa de $10 M_\odot$.

Se le pedirá al alumnado que averigüe cuánto tiempo le queda al agujero de “vida” cuando su temperatura es suficientemente alta como para producir electrones en su radiación (lo que requiere que kT exceda $m_e c^2$).

En 1976, Don Page refinó esta estimación calculando la potencia producida, y el tiempo hasta la evaporación, para un agujero negro de Schwarzschild no rotatorio y no cargado de masa M . El tiempo para que el horizonte de sucesos o la entropía de un agujero negro se reduzca a la mitad se conoce como el tiempo de Page. Los cálculos se complican por el hecho de que un agujero negro, al ser de tamaño finito, no es un cuerpo negro perfecto; la sección transversal de absorción desciende de forma complicada y dependiente del espín a medida que la frecuencia disminuye, especialmente cuando la longitud de onda se hace comparable al tamaño del horizonte de sucesos.

Page llegó a la conclusión de que los agujeros negros primordiales sólo podían sobrevivir hasta nuestros días si su masa inicial era de aproximadamente 4×10^{11} kg (unas 3,8 veces la biomasa seca de todos los seres humanos vivos ahora) o superior. Sin embargo, Page, utilizando los conocimientos de los neutrinos de la época, trabajó erróneamente con la suposición de que los neutrinos no tienen masa y que sólo existen dos sabores de neutrinos, por lo que sus resultados sobre la vida de los agujeros negros no coinciden con los resul-

tados modernos, que tienen en cuenta 3 sabores de neutrinos con masas distintas de cero. Un cálculo realizado en 2008 utilizando el contenido de partículas del Modelo Estándar y la cifra del WMAP para la edad del universo arrojó un límite de masa de $(5,00 \pm 0,04) \times 10^{11}$ kg.

Si los agujeros negros se evaporan bajo la radiación Hawking, un agujero negro de masa solar se evaporará en 10^{64} años, lo que es mucho más largo que la edad del universo. Un agujero negro supermasivo con una masa de $10^{11} M_{\odot}$ se evaporará en unos 2×10^{100} años. Se prevé que algunos agujeros negros monstruosos del universo sigan creciendo hasta quizás $10^{14} M_{\odot}$ durante el colapso de supercúmulos de galaxias. Incluso éstos acabarán evaporándose, pero en una escala de tiempo de 10^{106} años.

Derivación esquemática de la radiación de Hawking

En la sección 6.2 se le pedía al alumnado hacer un acto de fe y creer ciegamente en el hecho de que los agujeros negros puedan emitir radiación. Como comentábamos en ese punto, si el tiempo nos lo permite, se podría intentar derivar con ellos al menos de forma esquemática este resultado, por ser uno de los más importantes de la física moderna, en mi opinión. No tanto por sus implicaciones en la astrofísica, que prácticamente podríamos decir que no las tiene, sino por lo que representa desde un punto de vista de física.

Para este apartado uso la exposición de las notas de C. Hirata por ser muy adecuada. Sin embargo, he añadido explicaciones y comentarios que hacen la lectura más clara, a mi parecer, para el alumnado. Esta exposición de Hirata, a su vez, sigue de muy cerca los conceptos presentados en el libro de Bernard Schutz "A First Course in General Relativity", que fue director del instituto Albert Einstein, donde trabajé durante unos doce años en su grupo, del dos mil cuatro al dos mil dieciséis, aproximadamente (con unas pequeñas pausas aquí y allá). Bernard Schutz ha comentado conmigo varias de las implicaciones, tanto de estos resultados como de las primeras detecciones de LIGO, importantes para el concepto de luminosidad de Einstein, presentada en este bloque.

Hemos discutido que los agujeros negros tienen un área que solo puede crecer con el tiempo y, además, encontramos una relación que se parecía sospechosamente a la primera ley de la termodinámica con el área del horizonte desempeñando el papel de la entropía. Ahora completamos ese estudio mostrando que, de hecho, los agujeros negros irradian como cuerpos negros a cierta temperatura T . Esta temperatura es exactamente la cantidad adecuada para encajar en una relación termodinámica, y nos dirá la constante de proporcionalidad entre el área A y la entropía S .

Esto requiere teoría cuántica de campos en el espaciotiempo curvo; primero afrontaremos la teoría clásica de campos y luego intentaremos lidiar con la mecánica cuántica según corresponda.

Comencemos este estudio volviendo al espacio-tiempo de Schwarzschild,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Consideraremos la ecuación de onda escalar real en este espaciotiempo, dada por

$$\square \psi \equiv g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \psi = 0.$$

Es importante comunicarle al alumnado que podríamos elegir algo más complicado, como ondas electromagnéticas o gravitacionales, o incluso espinores, pero esto introduce índices que no son esenciales para el problema en cuestión. Los escalares son simples y solo hay una forma de escribir su segunda derivada. La ecuación de onda escalar se simplifica a

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \psi - g^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \partial_\gamma \psi = 0$$

Teniendo en cuenta los símbolos de Christoffel de Schwarzschild,

$$- \frac{1}{1 - 2M/r} \partial_t^2 \psi + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_r^2 \psi + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \psi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \psi + \left(\frac{2}{r} - \frac{2M}{r^2}\right) \partial_r \psi + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \psi = 0$$

Esta ecuación se puede separar por variables. Se le pedirá al alumnado que se desarrolle los momentos multipolares de la ecuación, es decir,

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{r} \Psi_{\ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \phi),$$

donde ponemos el factor de r para simplificar las operaciones más adelante. Esto es similar a cuando ponemos este factor en un problema de mecánica cuántica de potencial esférico 3D. Al hacerlo, eliminamos la variación $\sim 1/r$ debida a la variación de potencia en una onda esférica. Las derivadas angulares en la ecuación anterior son $1/r^2$ veces la componente angular del laplaciano y, por lo tanto, dan un factor de $-\ell(\ell+1)/r^2$:

$$- \frac{1}{1 - 2M/r} \partial_t^2 \frac{\Psi_{\ell m}}{r} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_r^2 \frac{\Psi_{\ell m}}{r} + \left(\frac{2}{r} - \frac{2M}{r^2}\right) \partial_r \frac{\Psi_{\ell m}}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \frac{\Psi_{\ell m}}{r} = 0.$$

El siguiente paso es hacer un cambio de variable que nos simplificará los cálculos, de r a $\bar{r}$, definido como

$$\partial_r = \frac{d\bar{r}}{dr} \partial_{\bar{r}} = \frac{1}{1 - 2M/r} \partial_{\bar{r}},$$

Por lo tanto, la ecuación multiplicada por r se convierte en

$$-\frac{1}{1 - 2M/r} \partial_t^2 \Psi_{\ell m} + r \partial_{\bar{r}} \left(\frac{1}{1 - 2M/r} \partial_{\bar{r}} \frac{\Psi_{\ell m}}{r} \right) + \left(2 - \frac{2M}{r} \right) \frac{1}{1 - 2M/r} \partial_r \frac{\Psi_{\ell m}}{r} - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \Psi_{\ell m} = 0.$$

Si usamos la regla del producto y el hecho de que

$$\partial_r \frac{1}{1 - 2M/r} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \partial_r \frac{1}{1 - 2M/r} = \frac{-2M/r^2}{1 - 2M/r}$$

y que

$$\partial_{\bar{r}} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \partial_{\bar{r}} r = -\frac{1 - 2M/r}{r^2},$$

podremos simplificar notablemente el resultado,

$$-\frac{1}{1 - 2M/r} \partial_t^2 \Psi_{\ell m} + \frac{1}{1 - 2M/r} \partial_{\bar{r}}^2 \Psi_{\ell m} - \left(\frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) \Psi_{\ell m} = 0.$$

Ahora se puede multiplicar por $1 - 2M/r$ para obtener:

$$\begin{aligned} & -\partial_t^2 \Psi_{\ell m} + \partial_{\bar{r}}^2 \Psi_{\ell m} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) \Psi_{\ell m} = \\ & -\partial_t^2 \Psi_{\ell m} + \partial_{\bar{r}}^2 \Psi_{\ell m} - U_{\ell}(\bar{r}) \Psi_{\ell m} = 0, \end{aligned}$$

que corresponde a una ecuación de onda en una dimensión en un potencial. Es importante evaluar el comportamiento de la ecuación con el alumnado para que comprenda a investigar el significado físico de las soluciones matemáticas.

- El potencial tiende exponencialmente a cero cuando $\bar{r} \rightarrow -\infty$ ya que $1 - 2M/r \propto e^{\bar{r}/2M}$ y a cero como $\sim 1/\bar{r}^2$ (o más rápido para $\ell = 0$) para valores grandes de $\bar{r}$.
- Por otra parte, cuando $M \rightarrow 0$, la ecuación parece una barrera de momento angular estándar.
- Es decir, independientemente de que estemos lejos del agujero negro o muy cerca del horizonte, la ecuación describe una onda que se propaga libremente.

Por lo tanto, el problema se puede describir mediante un coeficiente de transmisión de

potencia, $\mathbb{T}_\ell(\omega)$ a la frecuencia ω (es decir, para una onda en $\Psi \propto e^{-i\omega t}$), que es la fracción de la potencia incidente desde ∞ en el modo de onda ℓm que es absorbida por el agujero. Una de las implicaciones más interesantes, en mi opinión, es que, si estuviéramos hablando de mecánica cuántica, lo que acabamos de describir es la probabilidad de que una partícula incidente en esta onda parcial sea absorbida por el agujero. Y esto es importante porque recordemos que el significado de probabilidad en mecánica cuántica no tiene nada que ver con nuestro concepto macroscópico laplaciano.

Ahora se puede hacer lo que se denomina en alemán un "Gedankenexperiment", un experimento mental para comprender la esencia de la radiación de Hawking: Todas las ondas salientes en el sistema surgieron de ondas entrantes que apenas lograron regresar antes de cruzar el horizonte. El experimento es una idealización, pero los detalles no afectan el resultado básico.

Imaginemos que un espejo esférico cae en el agujero negro, y que la geometría es esféricamente simétrica. El espejo es una condición límite $\psi = 0$ o $\Psi_{\ell m} = 0$ en su línea universal en el espacio $(t, \bar{r})$.

Una vez que el espejo está más allá del potencial, la solución para $\Psi_{\ell m}$ es una simple onda plana entrante y saliente,

$$\Psi_{\ell m}(t, \bar{r}) = A_{\ell m \uparrow}(\bar{\eta}) + A_{\ell m \downarrow}(\bar{\xi}),$$

donde $\bar{\eta} = t - \bar{r}$ y $\bar{\xi} = t + \bar{r}$ describen las soluciones de onda "hacia arriba" y "hacia abajo" cerca del agujero negro. Necesariamente, se debe cumplir que

$$A_{\ell m \uparrow}(\bar{\eta}) = -A_{\ell m \uparrow}(\bar{\xi}_M(\bar{\eta}))$$

donde $\bar{\xi}_M(\bar{\eta})$ es la línea de mundo del espejo. Ahora, en el diagrama (ξ, η) , el espejo cruza el horizonte ($\eta = 0$) en algún punto crítico ξ_c con alguna pendiente $1/(q\xi_c)$. Por lo tanto, la línea del mundo tiene que satisfacer

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_M(\bar{\eta}) &= 4M \ln \xi = 4M \ln (\xi_c + q\xi_c \eta) = 4M \ln \left(\xi_c \left(1 - qe^{-\bar{\eta}/4M} \right) \right) \\ &\approx K - 4Mqe^{-\bar{\eta}/4M}, \end{aligned}$$

donde K es una constante. Por lo tanto, la señal reflejada hacia el exterior es la inversa de la señal entrante, pero con el eje de tiempo orientado de acuerdo con esta última ecuación. Las señales entrantes en $\bar{\xi} \geq K$ nunca se reflejan.

Desde un punto de vista clásico, si la amplitud incidente es cero, entonces nada regresa. Sin embargo, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, sabemos que el campo escalar tiene fluctuaciones cuánticas que entran. La gran pregunta para nosotros, entonces, es qué sale.

Sabemos que hay $\frac{1}{2}\hbar\omega$ de energía incluso en el estado de vacío de cada modo de onda. Esto es cierto incluso para frecuencias extraordinariamente altas. Resultará que estas fluctuaciones se convierten en modos salientes reales. Como cabe esperar cerca del horizonte, están extraordinariamente desplazados hacia el rojo, y su desplazamiento hacia el rojo crece con el tiempo, pero incluso cuando el desplazamiento hacia el rojo alcanza un valor extraordinariamente grande, siempre hay una onda entrante de frecuencia de igual forma extraordinariamente alta cuyas fluctuaciones en el vacío se desplazan hacia el rojo hasta la frecuencia de interés. Estas ondas desplazadas hacia el rojo y virtuales convertidas en reales se conocen como “radiación de Hawking”.

Consideremos ahora, por lo tanto, las fluctuaciones cuánticas. Para un campo escalar, las amplitudes que caen en el agujero negro satisfacen

$$\text{Var } A_{\uparrow} = \int \left[N_{\uparrow}(\omega) + \frac{1}{2} \right] \hbar\omega \times \frac{d\omega}{2\pi\omega^2},$$

donde la primera parte del integrando es la energía por modo para un número de ocupación de partículas $N_{\uparrow}$ en la frecuencia ω . La segunda parte tiene factores de normalización: dividimos por 2 ya que la energía es mitad cinética y mitad potencial; dividimos por $\frac{1}{2}\omega^2$ ya que la densidad de energía cinética es $\frac{1}{2}(\partial_t\Psi)^2$, no $\frac{1}{2}\Psi^2$; y dividimos por 2π ya que hemos construido una densidad de energía por modo, y el número de modos entrantes por unidad de longitud (por unidad $\bar{r}$) es $\Delta\omega/2\pi$. Ahora, por supuesto, esto es una variación; si queremos la covarianza en dos tiempos de entrada diferentes, $\bar{\xi}$ y $\bar{\xi}'$, debemos insertar el factor de fase apropiado:

$$\langle A_{\downarrow}(\bar{\xi})A_{\downarrow}(\bar{\xi}') \rangle = \int \left[N_{\downarrow}(\omega) + \frac{1}{2} \right] \hbar\omega \cos \omega (\bar{\xi} - \bar{\xi}') \frac{d\omega}{2\pi\omega^2}.$$

Dado que $A_{\downarrow}$ es real, obtenemos solo un coseno y no una exponencial compleja. Si las fluctuaciones del vacío solo disminuyen, de modo que $N_{\downarrow}(\omega) = 0$, tenemos

$$\langle A_{\downarrow}(\bar{\xi})A_{\downarrow}(\bar{\xi}') \rangle = \frac{\hbar}{4\pi} \int_{\omega_{\min}}^{\infty} \cos \omega (\bar{\xi} - \bar{\xi}') \frac{d\omega}{\omega}.$$

Aquí hemos usado un cierto rango de frecuencias, pero explícitamente hemos usado $\omega_{\min}$ ya que la integral divergirá como $\omega_{\min} \rightarrow 0$. Esta es una divergencia infrarroja y, si estamos haciendo las cosas bien, no debería ser un problema en principio. Podemos entender la divergencia sustituyendo $z = \omega (\bar{\xi} - \bar{\xi}')$ y luego notando que la integral se aproxima a $\int dz/z$ como $z \rightarrow 0$; por tanto, hay una divergencia logarítmica del límite inferior:

$$\int_{z_{\min}}^{\infty} \cos z \frac{dz}{z} \rightarrow \ln C - \ln z_{\min} = -\ln \frac{z_{\min}}{C}$$

para una constante C , y así

$$\langle A_{\downarrow}(\bar{\xi}) A_{\downarrow}(\bar{\xi}') \rangle = -\frac{\hbar}{4\pi} \ln \frac{\omega_{\min} |\bar{\xi} - \bar{\xi}'|}{C}.$$

Ahora consideremos las ondas salientes. Tenemos

$$\begin{aligned} \langle A_{\uparrow}(\bar{\eta}) A_{\uparrow}(\bar{\eta}') \rangle &= \langle A_{\downarrow}(\bar{\xi}_M(\bar{\eta})) A_{\downarrow}(\bar{\xi}_M(\bar{\eta}')) \rangle \\ &= -\frac{\hbar}{4\pi} \ln \frac{4Mq\omega_{\min} |e^{-\bar{\eta}/4M} - e^{-\bar{\eta}'/4M}|}{C} \\ &= -\frac{\hbar}{4\pi} \left[-\frac{\bar{\eta} + \bar{\eta}'}{8M} + \ln \sinh \frac{|\bar{\eta} - \bar{\eta}'|}{8M} + \ln \frac{4M\omega_{\min}}{C} \right]. \end{aligned}$$

Ahora extraemos las fluctuaciones de vacío, $\langle A_{\downarrow}(\bar{\xi}) A_{\downarrow}(\bar{\xi}') \rangle$, pero con $\bar{\xi}, \bar{\xi}' \rightarrow \bar{\eta}, \bar{\eta}'$:

$$\begin{aligned} \langle A_{\uparrow}(\bar{\eta}) A_{\uparrow}(\bar{\eta}') \rangle_{\text{vac. extr.}} &= -\frac{\hbar}{4\pi} \left[-\frac{\bar{\eta} + \bar{\eta}'}{8M} + \ln \sinh \frac{|\bar{\eta} - \bar{\eta}'|}{8M} + \right. \\ &\quad \left. \ln \frac{4M\omega_{\min}}{C} - \ln \frac{\omega_{\min} |\bar{\eta} - \bar{\eta}'|}{C} \right] \\ &= -\frac{\hbar}{4\pi} \left[-\frac{\bar{\eta} + \bar{\eta}'}{8M} + \ln \frac{\sinh [|\bar{\eta} - \bar{\eta}'|/8M]}{|\bar{\eta} - \bar{\eta}'|/8M} - \ln 2 \right] \end{aligned}$$

En la expresión entre paréntesis, el último término es una constante, por lo que solo contribuye con una frecuencia cero, y el primer término, que es una función lineal de $\bar{\eta}$ y $\bar{\eta}'$, contribuirá nuevamente con una frecuencia cero. Así que no nos interesa si estamos interesados en la radiación saliente. Pero el segundo término es especial.

Examinemos ahora el espectro de la radiación de Hawking. Queremos igualar $\langle A_{\uparrow}(\bar{\eta}) A_{\uparrow}(\bar{\eta}') \rangle_{\text{vac. extr.}}$ a una integral del tipo

$$\langle A_{\downarrow}(\bar{\xi}) A_{\downarrow}(\bar{\xi}') \rangle = \int \left[N_{\downarrow}(\omega) + \frac{1}{2} \right] \hbar \omega \cos \omega (\bar{\xi} - \bar{\xi}') \frac{d\omega}{2\pi\omega^2},$$

pero sin la contribución $+\frac{1}{2}$ debida a las fluctuaciones del vacío (que ya hemos sustraído). Es más fácil lograrlo si usamos la identidad:

$$\frac{\sinh x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{x^2}{(\pi n)^2} \right],$$

ya que $\sinh x/x = 1$ en $x = 0$, no tiene singularidades y tiene ceros en $\pm\pi$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Esto significa

$$-\frac{\hbar}{4\pi} \ln \frac{\sinh [|\bar{\eta} - \bar{\eta}'|/8M]}{|\bar{\eta} - \bar{\eta}'|/8M} = -\frac{\hbar}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{\Delta\bar{\eta}^2}{64\pi M^2 n^2} \right],$$

donde hemos usado $\Delta\bar{\eta} \equiv \bar{\eta} - \bar{\eta}'$. Por otro lado, si definimos

$$f_{\mu}(\Delta\bar{\eta}) = \int_0^{\infty} e^{-\mu\omega} \cos \omega \Delta\bar{\eta} \frac{d\omega}{\omega},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_{\Delta\bar{\eta}} f_{\mu}(\Delta\bar{\eta}) &= - \int_0^{\infty} e^{-\mu\omega} \sin \omega \Delta\bar{\eta} d\omega = \Im \int_0^{\infty} e^{-(\mu + i\Delta\bar{\eta})\omega} d\omega = \Im \frac{1}{\mu + i\Delta\bar{\eta}} = \\ &= - \frac{\Delta\bar{\eta}}{\mu^2 + \Delta\bar{\eta}^2} = - \frac{1}{2} \partial_{\Delta\bar{\eta}} \ln (\mu^2 + \Delta\bar{\eta}^2) = - \frac{1}{2} \partial_{\Delta\bar{\eta}} \ln \left(1 + \frac{\Delta\bar{\eta}^2}{\mu^2} \right). \end{aligned}$$

Integrando ambos lados y recordando que la constante aditiva es otra contribución de frecuencia cero, vemos que cada término en el último sumatorio es un f_{μ} con $\mu = 8\pi M n$:

$$\langle A_{\uparrow}(\bar{\eta}) A_{\uparrow}(\bar{\eta}') \rangle_{\text{vac. subtr.}} = \frac{\hbar}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_{8\pi M n}(\Delta\bar{\eta}) + [\text{términos con frecuencia nula}].$$

Si comparamos ahora con el resultado anterior, vemos que este es el espectro de radiación cuyo número de ocupación es una suma infinita de exponenciales, es decir, una serie geométrica:

$$N_{\uparrow}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-8\pi M n \omega} = \frac{1}{e^{8\pi M \omega} - 1}$$

Por lo tanto, este es un espectro de cuerpo negro a una temperatura de

$$T_H = \frac{\hbar}{8\pi k_B M} = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}$$

Así, el horizonte aparece como un cuerpo negro con temperatura T_H . Es decir, **un agujero negro no es absolutamente negro**. Es importante hacerle ver a los estudiantes que debido a la aparición de $\hbar$, este es un fenómeno puramente cuántico.

La temperatura del cuerpo negro de un agujero negro en unidades astrofísicas es

$$T_H = 60 \left(\frac{1 M_{\odot}}{M} \right) \text{ nK},$$

que, como decíamos al principio, es lo suficientemente pequeño como para no tener ningún tipo de implicación observacional.

Utilicemos ahora unidades en las que $\hbar = k_B = 1$, es decir, unidades de Planck.

Volvamos a la identidad termodinámica que mencionamos previamente,

$$dM = dT dS + \Omega dJ.$$

Para el agujero negro de Schwarzschild ($J = 0$), si interpretamos T_H como la temperatura T , vemos que la entropía satisface

$$S = \int \frac{dM}{T} = \int 8\pi M dM = 4\pi M^2 = \frac{1}{4}A,$$

donde A es el área del horizonte. Entonces, de hecho, hay una entropía proporcional a esta, con un factor de $\frac{1}{4}$. Esto es consistente con la interpretación del teorema del área en términos de termodinámica.

Estos resultados sugieren que existe algún grado microfísico de libertad que almacena un poco de información ($\Delta S = \ln 2$) en el horizonte por cada $4 \ln 2$ longitud cuadrada de Planck del área del horizonte (es decir, por cada $7,3 \times 10^{-70} \text{ m}^2$).

La verdadera naturaleza de estos grados de libertad sigue siendo desconocida. Pero de nuevo, esto es probablemente una gran pista en términos de cómo construir una teoría consistente de la gravedad cuántica.

Otra implicación notable de la radiación de Hawking, como hemos visto, es que un agujero negro se evaporará: dado que es un cuerpo negro, perderá masa a una velocidad de

$$-\dot{M} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{8\pi M\omega} - 1} \omega \mathbb{T}_{\ell} \frac{d\omega}{2\pi},$$

donde hemos sumado los modos y hemos añadido la probabilidad de transmisión de la barrera $\mathbb{T}_{\ell}$, de forma que solo escapan las partículas que pasan a través de ella. Además, hemos usado la energía por partícula ω y el flujo de los modos $d\omega/2\pi$. Esto es finito porque la barrera aumenta con ℓ y, por lo tanto, en general $\ell, \mathbb{T}_{\ell} \rightarrow 0$. También es así para una partícula escalar; para otros tipos de partículas (por ejemplo, fotones o gravitones) se necesitaría adicionalmente una suma de polarización y la probabilidad de transmisión correcta. Para agujeros negros lo suficientemente pequeños (es decir, lo suficientemente calientes), es necesario incluir partículas masivas como neutrinos o incluso electrones/positrones.

El resultado se puede estimar en orden de magnitud con $\sim 1/M^2$, ya que las sumas dan factores de orden unidad y el integrando alcanza su punto máximo cuando $\omega \sim 1/M$. Por lo tanto, se espera que un agujero negro tenga un tiempo de vida de orden $\sim M^3$ (en unidades de Planck, recordemos).

Un agujero negro de masa estelar tiene una masa de $\sim 10^{38}$ masas de Planck, por lo que tiene una vida útil de $\sim 10^{114}$ tiempos de Planck o 10^{64} años. Esta derivación asume, recordemos, que el agujero negro no acreta nada; en el universo real esto no es así. Aunque no acrete ni siquiera gas, el agujero negro devora continuamente fotones del CMB.

Ejercicios de relatividad y agujeros negros

Ejercicio 1

Hemos visto en la sección 6.2 que la "vida" útil de un agujero negro se puede calcular como $Mc^2/\mathcal{L}_p$, con $\mathcal{L}_p$ la luminosidad de Einstein o Planck.

Averigüe cuánto tiempo le queda al agujero de "vida" cuando su temperatura es suficientemente alta como para producir electrones en su radiación (pista: esto requiere que kT exceda $m_e c^2$).

Ejercicio 2

Dé razones de por qué

- (a) Los efectos de la RG son importantes para las estrellas de neutrones pero no para las enanas blancas.
- (b) La desintegración beta inversa se vuelve energéticamente favorable para densidades superiores a las de las enanas blancas.

Ejercicio 3

Use la teoría de Newton para derivar la ecuación de soporte de presión de Newton

$$P'(r) \equiv \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2},$$

donde

$$m = 4\pi \int_0^r \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}) d\tilde{r}$$

para una estrella esféricamente simétrica y estática con presión $P(r)$ y densidad $\rho(r)$. Demuestre que

$$\begin{aligned} \int_0^r P(\tilde{r}) \tilde{r}^3 d\tilde{r} &= \frac{P(r)r^4}{4} - \frac{1}{4} \int_0^r P'(\tilde{r}) \tilde{r}^4 d\tilde{r} \\ &= \frac{Gm^2(r)}{32\pi} + \frac{P(r)r^4}{4}. \end{aligned}$$

Suponiendo que $P' \leq 0$, con $P = 0$ en la superficie de la estrella, demuestre que

$$\frac{d}{dr} \left[\left(\int_0^r P(\tilde{r}) \tilde{r}^3 d\tilde{r} \right)^{3/4} \right] \leq \frac{3\sqrt{2}}{4} P^{3/4} r^2.$$

Suponiendo el límite

$$P \lesssim (\hbar c) n_e^{4/3}$$

donde $n_e(r)$ es la densidad numérica de electrones, demuestre que la masa total, M , de la estrella satisface

$$M \lesssim \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \left(\frac{\mu_e}{m_N} \right)^2,$$

donde m_N es la masa del nucleón y μ_e es el número de electrones por nucleón. ¿Por qué es razonable limitar la presión como lo ha hecho? Compare su límite con el límite de Chandrasekhar.

Ejercicio 4

Una partícula orbita un agujero negro de Schwarzschild con un momento angular distinto de cero por unidad de masa h . Dado que $\sigma = 0$ para una partícula sin masa y $\sigma = 1$ para una partícula masiva, demuestre que la órbita satisface

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{M\sigma}{h^2} + 3Mu^2,$$

donde $u = 1/r$ y ϕ es el ángulo azimutal. Verifique que esta ecuación se resuelve por

$$u = \frac{1}{6M} + \frac{2\omega^2}{3M} - \frac{2\omega^2}{M \cosh^2(\omega\phi)},$$

donde ω viene dado por

$$4\omega^2 = \pm \sqrt{\left(1 - \frac{12M^2\sigma}{h^2} \right)},$$

y $\sigma = 1$ para una partícula masiva y $\sigma = 0$ para una partícula sin masa. Interprete estas órbitas en términos del potencial efectivo. Comente sobre los casos $\omega^2 = 1/4$, $\omega^2 = 1/8$ y $\omega^2 = 0$.

Ejercicio 5

Se emite un fotón hacia fuera desde un punto P en el exterior de un agujero negro de Schwarzschild con la coordenada radial r en el rango $2M < r < 3M$. Demuestre que si el fotón debe alcanzar el infinito, el ángulo que forma su dirección inicial con la dirección radial (determinado por un observador estacionario en P) no puede exceder

$$\arcsin \sqrt{\frac{27M^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)}.$$

Ejercicio 6

Muestre que en la región II de la variedad de Kruskal se puede considerar r como una coordenada de tiempo e introducir una nueva coordenada espacial x tal que

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{\left(\frac{2M}{r} - 1\right)} + \left(\frac{2M}{r} - 1\right) dx^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Por lo tanto, demuestre que cada curva temporal en la región II se cruza con la singularidad en $r = 0$ dentro de un tiempo propio no mayor que πM . ¿Para qué curvas se alcanza este límite? Compare su resultado con el tiempo necesario para el colapso de una bola de materia libre de presión de la misma masa gravitacional M . Calcule la energía de enlace de una bola de polvo como una fracción de su masa en reposo (conservada).

Ejercicio 7

Usando el mapa

$$(t, x, y, z) \mapsto X = \begin{pmatrix} t + z & x + iy \\ x - iy & t - z \end{pmatrix},$$

demuestre que el espacio-tiempo de Minkowski puede identificarse con el espacio de las matrices hermitianas 2×2 X con métrica

$$ds^2 = -\det(dX).$$

Usando el mapa de Cayley $X \mapsto U = \frac{1+iX}{1-iX}$, muestre además que el espacio-tiempo de Minkowski puede identificarse con el espacio de matrices unitarias 2×2 U para las cuales $\det(1 + U) \neq 0$. Ahora demuestre que cualquier matriz unitaria 2×2 U puede expresarse únicamente en términos de un número real τ y dos números complejos α, β , como

$$U = e^{i\tau} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

donde los parámetros (τ, α, β) satisfacen $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, y están sujetos a la identificación

$$(\tau, \alpha, \beta) \sim (\tau + \pi, -\alpha, -\beta).$$

Usando la relación

$$(1 + U)dX = -2idU(1 + U)^{-1},$$

deduzca que

$$ds^2 = \frac{1}{(\cos \tau + \mathcal{R}e\alpha)^2} (-d\tau^2 + |d\alpha|^2 + |d\beta|^2)$$

es la métrica del espacio-tiempo de Minkowski y, por lo tanto, concluye que la compactación conforme del espacio-tiempo de Minkowski puede identificarse con el espacio de matrices unitarias 2×2 , es decir, el grupo $U(2)$. Explique cómo se puede identificar $U(2)$ con una parte del universo estático de Einstein $S^3 \times \mathbb{R}$.

Ejercicio 8

Sea ζ un campo vectorial Killing. Pruebe que

$$D_\sigma D_\mu \zeta_\nu = R_{\nu\mu\sigma}^\lambda \zeta_\lambda,$$

donde $R_{\nu\mu\sigma\lambda}$ es el tensor de Riemann, definido por $[D_\mu, D_\nu] v_\rho = R_{\mu\nu\rho}^\sigma v_\sigma$ para un campo vectorial arbitrario v .

Ejercicio 9

Un vector Killing conforme es aquel para el que

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$$

para una función distinta de cero Ω . Dado que ξ es un vector Killing de ds^2 , demuestre que es un vector Killing conforme de la métrica equivalente conforme $\Lambda^2 ds^2$ para el factor conforme Λ arbitrario (no nulo).

Demuestre que la acción para una partícula sin masa,

$$S[x, e] = \frac{1}{2} \int d\lambda e^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}(x)$$

es invariante a primer orden en la constante α , bajo la transformación

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \alpha \xi^\mu(x) \quad e \rightarrow e + \frac{1}{4} \alpha e g^{\mu\nu} (\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu}$$

si $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ es un vector Killing conforme. Demuestre que ξ es el operador correspondiente a la carga conservada implícita en el teorema de Nöther.

Ejercicio 10

Muestre que la métrica extrema RN en coordenadas isotrópicas es

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{M}{\rho}\right)^{-2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{\rho}\right)^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2).$$

Verifique que $\rho = 0$ esté a una distancia adecuada infinita de cualquier ρ finito a lo largo de cualquier curva de t constante. Verifique también que $|t| \rightarrow \infty$ como $\rho \rightarrow 0$ a lo largo de cualquier curva temporal o nula, pero que una geodésica radial entrante temporal o nula alcanza $\rho = 0$ para un parámetro afín finito.

Al introducir una coordenada nula para reemplazar ρ , demuestre que $\rho = 0$ es simplemente una singularidad de coordenadas y, por lo tanto, que la métrica (†) es geodésicamente incompleta. ¿Qué sucede con las partículas que llegan a $\rho = 0$? Ilustre las respuestas usando un diagrama de Penrose.

Ejercicio 11

La acción para una partícula de masa m y carga q es

$$S[x, e] = \int d\lambda \left[\frac{1}{2} e^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} m^2 e - q \dot{x}^\mu A_\mu(x) \right],$$

donde A_μ es el potencial electromagnético. Demuestre que si

$$(\mathcal{L}_\xi A)_\mu \equiv \xi^\nu \partial_\nu A_\mu + (\partial_\mu \xi^\nu) A_\nu = 0$$

para el vector Killing ξ , entonces S es invariante, de primer orden en ξ , bajo la transformación $x^\mu \rightarrow x^\mu + \alpha \xi^\mu(x)$. Verifique que la carga Nöther correspondiente

$$-\xi^\mu (m u_\mu - q A_\mu),$$

donde u^μ es la velocidad de la partícula, es una constante del movimiento.

Compruebe para la solución de Reissner-Nordstrom de las ecuaciones de vacío de Einstein-Maxwell, con masa M y carga Q , que $\mathcal{L}_k A = 0$ para $k = \frac{\partial}{\partial t}$ y, por lo tanto, deduzca, para $m \neq 0$, que

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \frac{dt}{d\tau} = \varepsilon - \frac{q}{m} \frac{Q}{r},$$

donde τ es el tiempo propio de la partícula y ε es la energía por unidad de masa. Muestre que las trayectorias $r(t)$ de partículas masivas con momento angular cero satisfacen

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = (\varepsilon^2 - 1) + \left(1 - \varepsilon \frac{qQ}{mM}\right) \frac{2M}{r} + \left[\left(\frac{q}{m}\right)^2 - 1\right] \frac{Q^2}{r^2}.$$

Dé una interpretación física de este resultado para el caso especial para el cual $q^2 = m^2$, $qQ = mM$ y $\varepsilon = 1$.

Ejercicio 12

Muestre que la acción

$$S[p, x, e] = \int d\lambda \left\{ p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} e \left[g^{\mu\nu}(x) p_\mu p_\nu + m^2 \right] \right\}$$

para una partícula puntual de masa m equivale, para $q = 0$, a la acción del ejercicio 6.2. Muestre que S es invariante de primer orden en α bajo la transformación

$$\delta x^\mu = \alpha K^{\mu\nu} p_\nu \quad \delta p_\mu = -\frac{1}{2} \alpha p_\rho p_\sigma \partial_\mu K^{\rho\sigma}$$

para cualquier tensor simétrico $K_{\mu\nu}$ que cumpla la condición del tensor Killing

$$D_{(\rho} K_{\mu\nu)} = 0.$$

Demuestre que la carga de Nöther correspondiente es proporcional a $K^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ y verifique que es una constante del movimiento. Un ejemplo trivial es $K_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

¿Cuál es la constante correspondiente del movimiento? Muestre que $\xi_\mu \xi_\nu$ es un tensor Killing si ξ es un vector Killing.

Note que se dice que un tensor de Killing es irreducible cuando no se puede construir a partir de la métrica y de vectores Killing. En una métrica axisimétrica general no existen tales tensores y, por lo tanto, solo hay tres constantes del movimiento, pero para las geodésicas de la métrica Kerr-Newman hay una “cuarta constante” del movimiento que corresponde a un tensor de Killing irreducible.

Ejercicio 13

Sustituyendo la coordenada de tiempo t por una de las coordenadas nulas radiales

$$u = t + \frac{M}{\lambda} \quad v = t - \frac{M}{\lambda},$$

muestre que la singularidad en $\lambda = 0$ de la métrica Robinson-Bertotti (RB)

$$ds^2 = -\lambda^2 dt^2 + M^2 \left(\frac{d\lambda}{\lambda} \right)^2 + M^2 d\Omega^2$$

es meramente una singularidad coordinada. Muestre también que $\lambda = 0$ es un horizonte Killing degenerado respecto a $\frac{\partial}{\partial t}$. Introduciendo las nuevas coordenadas (U, V) , definidas por

$$u = \tan\left(\frac{U}{2}\right) \quad v = -\cot\left(\frac{V}{2}\right),$$

obtenga la extensión analítica máxima de la métrica RB y deduzca su diagrama de Penrose.

Ejercicio 14

Sean ε y h la energía y el momento angular por unidad de masa de una partícula de carga cero en caída libre dentro del plano ecuatorial, es decir, en una geodésica temporal ($\sigma = 1$) o nula ($\sigma = 0$) con $\theta = \pi/2$, de un agujero negro de Kerr-Newman. Demuestre que la coordenada radial de Boyer-Lindquist de la partícula r satisface

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \varepsilon^2 - V_{\text{eff}}(r),$$

donde λ es un parámetro afín, y el potencial efectivo V_{eff} viene dado por

$$V_{\text{eff}} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) \left(\sigma + \frac{h^2}{r^2}\right) + \frac{2a\varepsilon h}{r^3} \left(2M - \frac{e^2}{r}\right) + \frac{a^2}{r^2} \left[\sigma - \varepsilon^2 \left(1 + \frac{2M}{r} - \frac{e^2}{r^2}\right)\right].$$

Ejercicio 15

Demuestre que la gravedad superficial del horizonte de sucesos de un agujero negro de Kerr de masa M y momento angular J viene dada por

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^4 - J^2}}{2M(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})}.$$

Ejercicio 16

Una partícula en r y θ fijos en un espaciotiempo estacionario, con métrica $ds^2 = g_{\mu\nu}(r, \theta)dx^\mu dx^\nu$, tiene velocidad angular $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$ con respecto al infinito. Demuestre que $\Omega(r, \theta)$ debe satisfacer

$$g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2 \leq 0.$$

De ahí obtenga que

$$\mathcal{D} \equiv g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} \geq 0.$$

Muestre que $\mathcal{D} = \Delta(r) \sin^2 \theta$ para la métrica Kerr-Newman en coordenadas Boyer-Lindquist, donde $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + e^2$. ¿Qué pasa si (r, θ) son tales que $\mathcal{D} < 0$? ¿Para qué valores de (r, θ) puede desaparecer Ω ? Dado que $r_{\pm}$ son las raíces de Δ demuestre que, cuando $\mathcal{D} = 0$,

$$\Omega = \frac{a}{r_{\pm}^2 + a^2}.$$

Ejercicio 17

Muestre que el área del horizonte de sucesos de un agujero negro de Kerr-Newman es

$$A = 8\pi \left[M^2 - \frac{e^2}{2} + \sqrt{M^4 - e^2 M^2 - J^2} \right].$$

Ejercicio 18

Un fluido perfecto tiene tensor de tensión

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu},$$

donde ρ es la densidad y $P(\rho)$ la presión. Enuncie la condición de energía dominante para $T_{\mu\nu}$ y demuestre que para un fluido perfecto en el espaciotiempo de Minkowski esta condición es equivalente a

$$\rho \geq |P|$$

.

Muestre que la misma condición surge del requisito de causalidad, es decir, que la velocidad del sonido, $\sqrt{|dP/d\rho|}$, no exceda la de la luz, junto con el hecho de que la presión se anula en el vacío.

Ejercicio 19

Las ecuaciones de vacío de Einstein-Maxwell son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}(F) \quad D_\mu F^{\mu\nu} = 0,$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, y

$$T_{\mu\nu}(F) = \frac{1}{4\pi} \left(F_\mu^\lambda F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right).$$

Las soluciones asintóticamente planas son estacionarias y axisimétricas si la métrica admite vectores Killing k y m que pueden tomarse como $k = \frac{\partial}{\partial t}$ y $m = \frac{\partial}{\partial \phi}$ cerca del infinito, y si (para una elección de gauge electromagnético determinada).

$$\mathcal{L}_k A = \mathcal{L}_m A = 0,$$

donde la derivada de Lie de A con respecto a un vector ξ , $\mathcal{L}_\xi A$ es como se define en el ejercicio 6.2. El horizonte de sucesos de tal solución es necesariamente un horizonte Killing de $\xi = k + \Omega_H m$, para alguna constante Ω_H . ¿Cuál es la interpretación física de Ω_H ? ¿Cuál es su valor para la solución de Kerr-Newman? El potencial eléctrico corotatorio se define por

$$\Phi = \xi^\mu A_\mu.$$

Utilice el hecho de que $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = 0$ en un horizonte Killing para mostrar que Φ es constante en el horizonte. En particular, demuestre que para una elección del gauge electromagnético para el cual $\Phi = 0$ en el infinito,

$$\Phi_H = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2}$$

para un agujero negro de Kerr cargado, donde $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$.

Ejercicio 20

Sea $(\mathcal{M}, g, A)$ una solución asintóticamente plana, estacionaria y axisimétrica de las ecuaciones de Einstein-Maxwell del ejercicio 6.2 y sea Σ una hipersuperficie similar a un espacio con un límite en el infinito espacial y un límite interno, H , en el horizonte de sucesos de un agujero negro de carga Q . Pruebe que

$$-2 \int_{\Sigma} dS_\mu T^\mu_\nu(F)\xi^\nu = \Phi_H Q,$$

donde Φ_H es el potencial eléctrico corotante en el horizonte. Utilice este resultado para deducir que la masa M de un agujero negro de Kerr cargado viene dada por

$$M = \frac{\kappa A}{4\pi} + 2\Omega_H J + \Phi_H Q,$$

donde J es el momento angular total. Use esta fórmula para M para deducir la primera ley de mecánica de agujeros negros de Kerr cargados:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ.$$

(Pista: $\mathcal{L}_\xi(F^{\mu\nu}A_\nu) = 0$)

Ejercicio 21

Usando la integral de Komar,

$$J = \frac{1}{16\pi G} \oint_{\infty} dS_{\mu\nu} D^\mu m^\nu,$$

para el momento angular total de un espacio-tiempo axisimétrico asintóticamente plano (con el vector Killing m), verifique que $J = Ma$ es la solución de Kerr-Newman con el parámetro a .

Ejercicio 22

Sean l y n dos vectores linealmente independientes y $\hat{B}$ un tensor de segundo rango tal que

$$\hat{B}_\mu{}^\nu l_\nu = \hat{B}_\mu{}^\nu n_\nu = 0.$$

Dado que $\eta^{(i)}$ ($i = 1, 2$) son otros dos vectores linealmente independientes, demuestre que

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} l_\mu n_\nu \hat{B}_\rho{}^\lambda \left(\eta_\lambda^{(1)} \eta_\sigma^{(2)} - \eta_\sigma^{(1)} \eta_\lambda^{(2)} \right) = \theta \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} l_\mu n_\nu \eta_\rho^{(1)} \eta_\sigma^{(2)},$$

donde $\theta = \hat{B}_\alpha{}^\alpha$.

Ejercicio 23

Sea $\mathcal{N}$ un horizonte Killing de un campo vectorial Killing ξ , con gravedad superficial κ . Explique por qué, para cualquier tensor A totalmente antisimétrico de tercer rango, el escalar $\Psi = A^{\mu\nu\rho} (\xi_\mu D_\nu \xi_\rho)$ desaparece en $\mathcal{N}$. Use esto para mostrar que

$$(\xi_{[\rho} D_{\sigma]} \xi_\nu) (D^\nu \xi^\mu) = \kappa \xi_{[\rho} D_{\sigma]} \xi^\mu \quad (\text{on } \mathcal{N}),$$

donde los corchetes indican antisimetrización en los índices adjuntos.

Del hecho de que Ψ se anula en $\mathcal{N}$ se puede ver que su derivada en $\mathcal{N}$ es normal a $\mathcal{N}$ y, por lo tanto, $\xi_{[\mu} \partial_{\nu]} \Psi = 0$ en $\mathcal{N}$. Use este hecho y el lema del vector Killing del ejercicio 6.2 para deducir que, en $\mathcal{N}$,

$$\left(\xi_\nu R_{\sigma\rho[\beta} \lambda_\alpha + \xi_\rho R_{\nu\sigma[\beta} \hat{\xi}_{\alpha]} + \xi_\sigma R_{\rho\nu[\beta} \lambda_{\xi\alpha]} \right) \xi_\lambda.$$

Contraiga en ρ y α y utilice el hecho de que $\xi^2 = 0$ en $\mathcal{N}$ para demostrar que

$$\xi^\nu \xi_{[\rho} R_{\sigma]\nu\mu} \lambda^{\xi\lambda} = -\xi_\mu \xi_{[\rho} R_{\sigma]}{}^\lambda \xi_\lambda \quad (\text{on } \mathcal{N}),$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci.

Para cualquier vector v , el escalar $\Phi = (\xi \cdot D\xi - \kappa\xi) \cdot v$ desaparece en $\mathcal{N}$. De ello se deduce que $\xi_{[\mu} \partial_{\nu]} \Phi|_{\mathcal{N}} = 0$. Muestre que este hecho, el resultado (*) derivado anteriormente y el lema del vector Killing implican que, en $\mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} \xi^\mu \xi_{[\rho} \partial_{\sigma]} \kappa &= \xi^\nu R_{\mu\nu[\sigma} \lambda_{\xi\rho]} \xi_\lambda \\ &= \xi^\nu \xi_{[\rho} R_{\sigma]\nu\mu} \lambda^{\xi\lambda}, \end{aligned}$$

donde la segunda línea es una consecuencia de la identidad cíclica satisfecha por el tensor de Riemann. Ahora use $(\dagger)$ para mostrar que, en $\mathcal{N}$,

$$\begin{aligned}\xi^\mu \xi_{[\rho} \partial_{\sigma]} \kappa &= \xi_{[\sigma} R_{\rho]} \lambda_\xi \\ &= 8\pi G \xi_{[\sigma} T_{\rho]} \lambda_\xi,\end{aligned}$$

donde la segunda línea sigue al usar las ecuaciones de Einstein. Por lo tanto, deduzca la ley cero de la mecánica de los agujeros negros: que, siempre que el tensor de tensión de la materia satisfaga la condición de energía dominante, la gravedad superficial de cualquier campo vectorial Killing ξ es constante en cada componente conectado de su horizonte Killing (en particular, en el horizonte de eventos de un espaciotiempo estacionario).

Ejercicio 24

Un campo escalar Φ en el espaciotiempo de Kruskal satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$D^2\Phi - m^2\Phi = 0.$$

Dado que, en coordenadas estáticas de Schwarzschild, Φ toma la forma

$$\Phi = R_\ell(r) e^{-i\omega t} Y_\ell(\theta, \phi),$$

donde $Y_{\ell m}$ es un armónico esférico, encuentre la ecuación radial satisfecha por $R_\ell(r)$. Muestre eso cerca del horizonte en $r = 2M$, $\Phi \sim e^{\pm i\omega r^*}$, donde r^* es la coordenada radial de Regge-Wheeler. Verifique que las ondas entrantes son analíticas en coordenadas Kruskal y en el horizonte futuro, $\mathcal{H}^+$, pero no, en general, en el horizonte pasado, $\mathcal{H}^-$, y viceversa para las ondas salientes.

Dado que tanto m como ω desaparecen, demuestre que

$$R_\ell = A_\ell P_\ell(z) + B_\ell Q_\ell(z)$$

para las constantes A_ℓ , B_ℓ , donde $z = (r - M)/M$, $P_\ell(z)$ es un polinomio de Legendre y $Q_\ell(z)$ una solución linealmente independiente. Por lo tanto, demuestre que no hay soluciones no constantes que sean regulares en el horizonte, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-$, y acotadas en el infinito.

Ejercicio 25

Utilice el hecho de que un agujero negro de Schwarzschild irradia a la temperatura de Hawking

$$T_H = \frac{1}{8\pi M},$$

(en unidades en las que $\hbar$, G , c y la constante de Boltzmann son todas iguales a 1) para mostrar que el equilibrio térmico de un agujero negro con una reserva infinita de radiación a la temperatura T_H es inestable. Un depósito finito de radiación de volumen V a temperatura T tiene una energía, E_{res} y una entropía, S_{res} dadas por

$$E_{\text{res}} = \sigma VT^4 \quad S_{\text{res}} = \frac{4}{3}\sigma VT^3,$$

donde σ es una constante. Un agujero negro de Schwarzschild de masa M se coloca en el depósito. Suponiendo que el agujero negro tiene entropía

$$S_{\text{BH}} = 4\pi M^2,$$

demuestre que la entropía total $S = S_{\text{BH}} + S_{\text{res}}$ se extrema para la energía total fija $E = M + E_{\text{res}}$, cuando $T = T_H$, demuestre que el extremo es máximo si y solo si $V < V_c$, donde el valor crítico de V es

$$V_c = \frac{2^{20}\pi^4 E^5}{5^5 \sigma}.$$

¿Qué sucede cuando V pasa de $V < V_c$ a $V > V_c$, o viceversa?

Ejercicio 26

El calor específico de un agujero negro cargado de masa M , con carga fija Q , es

$$C \equiv T_H \left. \frac{\partial S_{\text{BH}}}{\partial T_H} \right|_Q,$$

donde T_H es su temperatura de Hawking y S_{BH} su entropía. Suponiendo que la entropía de un agujero negro viene dada por $S_{\text{BH}} = \frac{1}{4}A$, donde A es el área del horizonte de sucesos, demuestre que el calor específico de un agujero negro de Reissner-Nordstrom es

$$C = \frac{2S_{\text{BH}}\sqrt{M^2 - Q^2}}{(M - 2\sqrt{M^2 - Q^2})},$$

Por lo tanto, demuestre que C^{-1} cambia de signo cuando M pasa por $\frac{2|Q|}{\sqrt{3}}$.

Repita el ejercicio 6.2 para un agujero negro de Reissner-Nordstrom. Específicamente, demuestre que el volumen crítico disponible, V_c , es infinito para $|Q| \leq M \leq \frac{2|Q|}{\sqrt{3}}$. ¿Por qué se espera este resultado a partir del anterior para C ?

6.3. Tema II: Estrellas de neutrones

La existencia de las estrellas de neutrones fue propuesta por primera vez por Walter Baade y Fritz Zwicky en 1934, cuando argumentaron que una pequeña y densa estrella

compuesta principalmente por neutrones sería el resultado de una supernova. Basándose en la idea de la conservación del flujo magnético de las estrellas magnéticas de la secuencia principal, Lodewijk Woltjer propuso en 1964 que tales estrellas de neutrones podrían contener campos magnéticos tan grandes como 10^{14} o 10^{16} Gauss (es decir, 10^{10} y 10^{12} T).

En 1967, poco antes del descubrimiento de los púlsares, Franco Pacini sugirió que una estrella de neutrones en rotación con un campo magnético emitiría radiación, e incluso señaló que dicha energía podría ser bombeada a un remanente de supernova alrededor de una estrella de neutrones, como la nebulosa del Cangrejo.

Tras el descubrimiento del primer púlsar, Thomas Gold sugirió de forma independiente un modelo de estrella de neutrones en rotación similar al de Pacini, y argumentó explícitamente que este modelo podría explicar la radiación pulsante observada por Bell Burnell y Hewish.

Conceptos principales

Una estrella de neutrones es el núcleo colapsado de una estrella supergigante masiva con una masa total de entre 10 y 25 masas solares. Esta masa puede ser incluso mayor si la estrella era especialmente rica en metales. Excepto los agujeros negros y algunos objetos hipotéticos (por ejemplo, los agujeros blancos, las estrellas de quarks y las estrellas extrañas), las estrellas de neutrones son la clase de objetos estelares más pequeños y densos que se conocen actualmente.

Las estrellas de neutrones tienen un radio del orden de 10 kilómetros y una masa de aproximadamente 1,4 masas solares. Son el resultado de la explosión de supernova de esa estrella masiva inicial, que comprime el núcleo más allá de la densidad de una estrella enana blanca.

Una vez formadas estas estrellas de neutrones, ya no generan calor de forma activa, y se enfrían con el tiempo; sin embargo, aún pueden evolucionar más por colisión o acreción. La mayoría de los modelos básicos de estos objetos implican que las estrellas de neutrones están compuestas casi en su totalidad por neutrones. Las estrellas de neutrones pueden evitar un colapso gravitatorio ulterior, que les llevaría a convertirse en agujeros negros gracias a la presión de degeneración de neutrones, un fenómeno descrito por el principio de exclusión de Pauli, al igual que las enanas blancas están apoyadas contra el colapso por la presión de degeneración de electrones.

Sin embargo, la presión de degeneración de los neutrones no es suficiente por sí misma para sostener un objeto de más de $0,7 M_{\odot}$. En este caso, las fuerzas nucleares repulsivas desempeñan un papel más importante en el sostenimiento de las estrellas de neutrones más masivas. Si la estrella tiene una masa que supera el límite Tolman-Oppenheimer-Volkoff de unas 2 masas solares, la combinación de la presión de degeneración y las fuerzas nucleares es insuficiente para sostener la estrella de neutrones y ésta continúa colapsando

para formar un agujero negro. La estrella de neutrones más masiva detectada hasta ahora, PSR J0740+6620, se estima en $2,08 \pm 0,07$ masas solares.

Las estrellas de neutrones que pueden observarse son muy calientes y suelen tener una temperatura superficial de unos 600.000 K. Éstas, además, son notablemente densas. Un ejemplo ayuda siempre al alumnado a comprender los conceptos físicos de los que estamos hablando, de tal forma que se podría hacer el siguiente: Una caja de cerillas de tamaño normal que contuviera material de estrella de neutrones tendría un peso de aproximadamente 3.000 millones de toneladas, el mismo peso que un cubo con aristas de unos 800 metros de la superficie terrestre.

Continuando con los ejemplos, los campos magnéticos generados por una estrella de neutrones son entre 10^8 y 10^{15} (100 millones y 1 cuatrillón) veces más fuertes que el campo magnético de la tierra. El campo gravitatorio en la superficie de la estrella de neutrones es unas 2×10^{11} (200 mil millones) veces el del campo gravitatorio de la tierra.

A medida que el núcleo de la estrella colapsa, su velocidad de rotación aumenta como resultado de la conservación del momento angular y, por tanto, las estrellas de neutrones recién formadas giran hasta varios cientos de veces por segundo. Algunas estrellas de neutrones emiten haces de radiación electromagnética que las hacen detectables como púlsares. De hecho, el descubrimiento de los púlsares por parte de Jocelyn Bell Burnell y Antony Hewish en 1967 fue la primera sugerencia observacional de la existencia de las estrellas de neutrones. Se cree que la radiación de los púlsares se emite principalmente desde regiones cercanas a sus polos magnéticos. Si los polos magnéticos no coinciden con el eje de rotación de la estrella de neutrones, el haz de emisión barre el cielo y, visto a distancia, si el observador se encuentra en algún lugar de la trayectoria del haz, aparecerá como pulsos de radiación procedentes de un punto fijo del espacio (el llamado "efecto faro"). La estrella de neutrones que gira más rápido que se conoce es la PSR J1748-2446ad, que gira a un ritmo de 716 veces por segundo o 43.000 revoluciones por minuto, lo que da una velocidad lineal en la superficie del orden de 0,24 c (es decir, casi un cuarto de la velocidad de la luz).

Se cree que hay unos mil millones de estrellas de neutrones en la Vía Láctea y, como mínimo, varios cientos de millones, cifra que se obtiene estimando el número de estrellas que han sufrido explosiones de supernova. Sin embargo, la mayoría son viejas y frías e irradian muy poco; la mayor parte de las estrellas de neutrones que se han detectado sólo se dan en determinadas situaciones en las que sí irradian, como si son un púlsar o forman parte de un sistema binario. Las estrellas de neutrones de rotación lenta y que no emiten radiación son casi indetectables; sin embargo, desde la detección de RX J185635-3754 por el telescopio espacial Hubble en la década de 1990, se han detectado algunas estrellas de neutrones cercanas que parecen emitir sólo radiación térmica. Se conjetura que los repetidores de rayos gamma suaves son un tipo de estrella de neutrones con campos magnéticos muy fuertes, conocidos como magnetares, o bien, estrellas de neutrones con discos fósiles a su alrededor.

Las estrellas de neutrones en sistemas binarios pueden sufrir acreción, lo que normalmente hace que el sistema sea brillante en rayos X, mientras que el material que cae sobre la estrella de neutrones puede formar puntos calientes que giran dentro y fuera de la vista en sistemas de púlsares de rayos X identificados. Además, esta acreción puede reciclar púlsares antiguos y hacer que ganen masa y giren a velocidades de rotación muy rápidas, formando los llamados púlsares de milisegundos. Estos sistemas binarios seguirán evolucionando y, con el tiempo, las compañeras pueden convertirse en objetos compactos, como enanas blancas o estrellas de neutrones, aunque otras posibilidades incluyen la destrucción completa de la compañera. La fusión de estrellas de neutrones binarias es una la fuente de estallidos de rayos gamma de corta duración y son probablemente fuertes fuentes de ondas gravitacionales. En 2017, se observó una detección directa (GW170817) de las ondas gravitacionales de un evento de este tipo y también se han observado ondas gravitacionales indirectamente en un sistema en el que dos estrellas de neutrones orbitan entre sí.

Formación

Cualquier estrella de secuencia principal con una masa inicial superior a 8 veces la masa del sol tiene el potencial de producir una estrella de neutrones. A medida que la estrella se aleja de la secuencia principal, la posterior combustión nuclear produce un núcleo rico en hierro. Cuando todo el combustible nuclear del núcleo se ha agotado, éste debe sostenerse únicamente por la presión de degeneración. Los depósitos adicionales de masa procedentes de la combustión de la cáscara hacen que el núcleo supere el límite de Chandrasekhar. La presión de degeneración de los electrones se supera y el núcleo se colapsa aún más, lo que hace que las temperaturas se disparen a más de 5×10^9 K. A estas temperaturas, se produce la fotodisgregación; es decir, la disociación de núcleos de hierro, en partículas alfa mediante rayos gamma de alta energía.

A medida que la temperatura sube aún más, los electrones y protones se combinan para formar neutrones mediante la captura de electrones, liberando una avalancha de neutrinos. Cuando la densidad alcanza una densidad nuclear de $4 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$, una combinación de fuerza fuerte de repulsión y presión de degeneración de neutrones detiene la contracción. La envoltura exterior de la estrella, que está en proceso de inflexión, se detiene y es lanzada hacia el exterior por un flujo de neutrinos producido en la creación de los neutrones, convirtiéndose en una supernova. El remanente que queda es una estrella de neutrones. Si el remanente tiene una masa superior a unos $3 M_{\odot}$, colapsa aún más hasta convertirse en un agujero negro.

Cuando el núcleo de una estrella masiva se comprime durante una supernova de tipo II o de tipo Ib o Ic, y colapsa en una estrella de neutrones, conserva la mayor parte de su momento angular. Pero, como sólo tiene una pequeña fracción del radio de su progenitora

(y, por tanto, su momento de inercia se reduce drásticamente), una estrella de neutrones se forma con una velocidad de rotación muy alta, y luego, durante un período muy largo, se ralentiza. Se conocen estrellas de neutrones que tienen períodos de rotación de entre 1,4 ms y 30 s.

La densidad de la estrella de neutrones también le confiere una gravedad superficial muy elevada, con valores típicos que oscilan entre 10^{12} y 10^{13} m s^{-2} (más de 10^{11} veces la de la tierra). Una medida de esa inmensa gravedad es el hecho de que las estrellas de neutrones tienen una velocidad de escape que oscila entre 100.000 km/s y 150.000 km/s, es decir, entre un tercio y la mitad de la velocidad de la luz. La gravedad de la estrella de neutrones acelera la materia que se aproxima a una velocidad tremenda. La fuerza de su impacto probablemente destruiría los átomos que componen el objeto, haciendo que toda la materia sea idéntica, en la mayoría de los aspectos, al resto de la estrella de neutrones.

Masa y temperatura

Una estrella de neutrones tiene una masa de al menos 1,1 masas solares. El límite superior de la masa de una estrella de neutrones se denomina límite Tolman-Oppenheimer-Volkoff y generalmente se considera que está en torno a $2,1 M_{\odot}$. La masa máxima observada de las estrellas de neutrones es de unos $2,14 M_{\odot}$ del sistema PSR J0740+6620 descubierto en septiembre del 2019 [28].

Las estrellas compactas por debajo del límite de Chandrasekhar de $1,39 M_{\odot}$ son generalmente enanas blancas mientras que las estrellas compactas con una masa entre $1,4 M_{\odot}$ y $2,1 M_{\odot}$ se espera que sean estrellas de neutrones. Sin embargo, hay un intervalo de unas pocas décimas de masa solar donde las masas de las estrellas de neutrones de baja masa y las enanas blancas de alta masa pueden superponerse. Se cree que más allá de $2,16 M_{\odot}$ el remanente estelar superará la repulsión de la fuerza fuerte y la presión de degeneración de los neutrones, de modo que se producirá un colapso gravitatorio que dará lugar a un agujero negro, pero la masa más pequeña observada de un agujero negro estelar es de unos $5 M_{\odot}$. Entre $2,16$ y $5 M_{\odot}$ se han propuesto hipotéticas estrellas de masa intermedia, como las estrellas de quarks y las estrellas electrodebiles, pero no se ha demostrado la existencia de ninguna.

La temperatura en el interior de una estrella de neutrones recién formada es de unos 10^{11} a 10^{12} K. Sin embargo, el enorme número de neutrinos que emite arrastra tanta energía que la temperatura de una estrella de neutrones aislada cae en pocos años a unos 10^6 K. A esta temperatura más baja, la mayor parte de la luz generada por una estrella de neutrones es en rayos X.

Se ha propuesto un sistema de clasificación de las estrellas de neutrones utilizando números romanos (que no deben confundirse con las clases de luminosidad de Yerkes para las estrellas no degeneradas) para clasificar las estrellas de neutrones según su masa y

tasas de enfriamiento: el tipo I para las estrellas de neutrones con baja masa y tasas de enfriamiento, el tipo II para las estrellas de neutrones con mayor masa y tasas de enfriamiento, y un tipo III propuesto para las estrellas de neutrones con una masa aún mayor, cercana a los $2, M_{\odot}$, y con mayores tasas de enfriamiento y posiblemente candidatas a estrellas exóticas.

Densidad y presión

Las estrellas de neutrones tienen densidades totales de $3,7 \times 10^{17}$ a $5,9 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$, es decir, entre $2,6$ y $4,1 \times 10^{14}$ la del sol, lo que es comparable a la densidad aproximada de un núcleo atómico de $3 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$.

La densidad varía desde unos 10^9 kg m^{-3} en la corteza -que aumenta con la profundidad- hasta unos 6 o incluso $8 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$ en el interior, lo que la hace más densa que un núcleo atómico.

Para seguir con los ejemplos, una cucharadita (5 mililitros) de su material tendría una masa superior a unas 900 veces la masa de la Gran Pirámide de Giza. En el enorme campo gravitatorio de una estrella de neutrones, esa cucharadita de material pesaría $1,1 \times 10^{25} \text{ N}$, es decir, 15 veces lo que pesaría la luna si se colocara en la superficie de la tierra. Toda la masa de la tierra a la densidad de una estrella de neutrones cabría en una esfera de 305 m de diámetro (el tamaño del telescopio de Arecibo). La presión aumenta de $3,2 \times 10^{31}$ a $1,6 \times 10^{34} \text{ Pa}$ desde la corteza interior hasta el centro.

La ecuación de estado de la materia a densidades tan elevadas no se conoce con precisión debido a las dificultades teóricas asociadas a la extrapolación del comportamiento probable de la cromodinámica cuántica, la superconductividad y la superfluidez de la materia en tales estados. El problema se agrava por las dificultades empíricas de observar las características de cualquier objeto que esté a cientos de pársecs de distancia, o más. Sin embargo, hay que hacerle comprender al alumnado lo importante de este problema, ya que nos da información sobre el comportamiento de la materia en el universo de una forma que es imposible de observar en ninguna otra parte.

Una estrella de neutrones tiene algunas de las propiedades de un núcleo atómico, incluyendo la densidad (dentro de un orden de magnitud) y el estar compuesta de nucleones. Por ello, en la literatura científica popular, las estrellas de neutrones se describen a veces como "núcleos gigantes". Sin embargo, en otros aspectos, las estrellas de neutrones y los núcleos atómicos son bastante diferentes. Un núcleo se mantiene unido por la interacción fuerte, mientras que una estrella de neutrones se mantiene unida por la gravedad. La densidad de un núcleo es uniforme, mientras que se prevé que las estrellas de neutrones estén formadas por múltiples capas con composiciones y densidades diferentes.

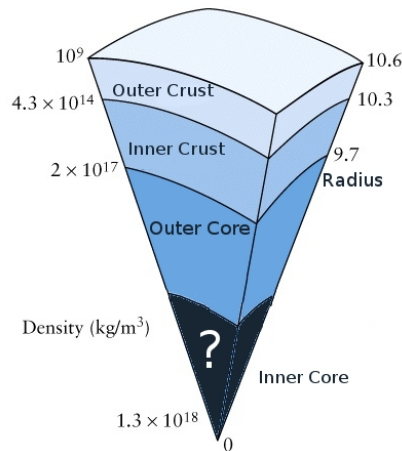


Figura 6.14: Diferentes densidades en el interior de una estrella de neutrones. Trabajo de [29].

Estructura

La comprensión actual de la estructura de las estrellas de neutrones está definida por modelos matemáticos existentes, pero podría ser posible inferir algunos detalles mediante estudios de las oscilaciones de las estrellas de neutrones. La astrosismología, un estudio aplicado a las estrellas ordinarias, puede revelar la estructura interna de las estrellas de neutrones mediante el análisis de los espectros observados de las oscilaciones estelares.

Los modelos actuales indican que la materia en la superficie de una estrella de neutrones está compuesta por núcleos atómicos ordinarios comprimidos en una red sólida con un mar de electrones que fluye por los huecos entre ellos. Es posible que los núcleos de la superficie sean de hierro, debido a la alta energía de enlace del hierro por nucleón. También es posible que los elementos pesados, como el hierro, simplemente se hundan bajo la superficie, dejando aislados los núcleos ligeros, tales como el helio y el hidrógeno. Si la temperatura de la superficie supera los 10^6 K, la superficie debería ser fluida en lugar de la fase sólida que podría existir en estrellas de neutrones más frías (temperatura $< 10^6$ K).

Se supone que la atmósfera de una estrella de neutrones tiene como máximo varios micrómetros de espesor, y su dinámica está totalmente controlada por el campo magnético de la estrella de neutrones. Por debajo de la atmósfera se encuentra una corteza sólida, extremadamente dura y muy lisa (con irregularidades superficiales máximas del orden de milímetros o menos), debido al campo gravitatorio extremo.

Al avanzar hacia el interior, se encuentran núcleos con un número cada vez mayor de neutrones; estos núcleos se descompondrían rápidamente en la tierra, pero se mantienen estables gracias a las enormes presiones. A medida que este proceso continúa a una profundidad cada vez mayor, el goteo de neutrones domina poco a poco. En esa región hay nú-

cleos, electrones libres y neutrones libres. Los núcleos se vuelven cada vez más pequeños, porque la gravedad y la presión superan con creces la fuerza fuerte, hasta que se alcanza el núcleo, que es por definición el punto donde se encuentran neutrones.

La jerarquía esperada de las fases de la materia nuclear en el interior de la corteza se ha caracterizado como “pasta nuclear”, con menos vacíos y estructuras más grandes hacia presiones más altas. La composición de la materia superdensa del núcleo sigue siendo incierta. Un modelo describe el núcleo como materia superfluida neutrónica-degenerada (principalmente neutrones, con algunos protones y electrones). Es posible que existan formas más exóticas de materia, como la materia extraña degenerada (que contiene quarks extraños además de quarks up y down), la materia que contiene piones y kaones de alta energía además de neutrones, o materia ultradensa degenerada en quarks.

La estructura de la estrella de neutrones puede dividirse en cuatro capas principales (véase la figura 6.14):

Una corteza exterior que parte de la superficie y tiene un grosor de unos cientos de metros, compuesta por núcleos atómicos y electrones libres. Su densidad es de apenas una tonelada por centímetro cúbico.

La corteza interna donde los neutrones libres se suman a los núcleos atómicos y los electrones libres forman una capa sólida muy densa.

Un núcleo externo (líquido) donde los electrones libres, los neutrones, los protones y los muones coexisten en una sopa nuclear.

El fondo del núcleo externo donde la densidad crece tanto que describir la interacción de las partículas se vuelve problemático, ya que nuestro conocimiento de la fuerza fuerte es limitado a estas densidades. Hay que recordar al alumnado que la fuerza fuerte es responsable de la interacción entre los quarks en los nucleones y también de la existencia de la fuerza nuclear que mantiene unidos los núcleos atómicos. Este punto marca el comienzo del núcleo interno, una zona misteriosa donde las partículas elementales se comportan de forma imprevisible. En la figura 6.15 mostramos de forma esquemática este interior.

Campo magnético: Estrellas de neutrones y magnetares

La intensidad del campo magnético en la superficie de las estrellas de neutrones oscila entre 10^4 y 10^{11} T, lo que supone muchos órdenes de magnitud superiores a los de cualquier otro objeto: A modo de comparación, en el laboratorio se ha conseguido un campo continuo de 16 T que es suficiente para hacer levitar a una rana viva gracias a la levitación

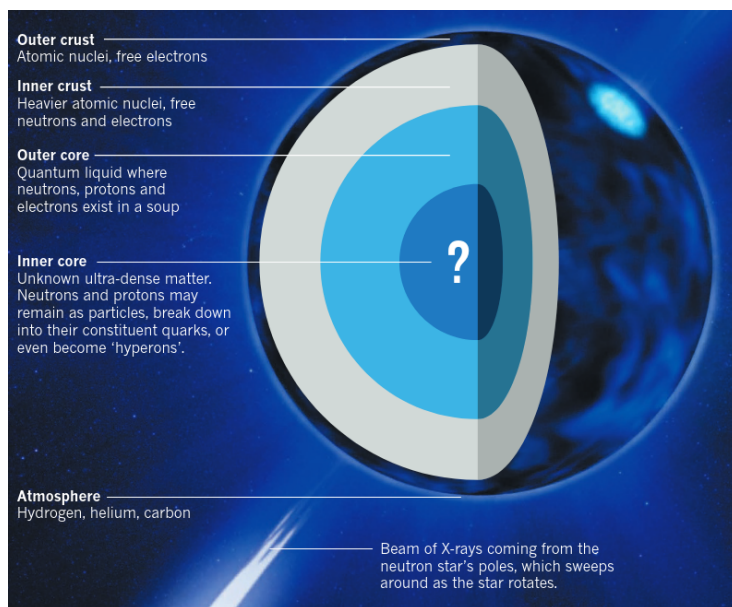


Figura 6.15: Ilustración del interior de una estrellas de neutrones, adaptado de [30].

diamagnética. Las variaciones en las intensidades de los campos magnéticos son probablemente el principal factor que permite distinguir los diferentes tipos de estrellas de neutrones por sus espectros, y explica la periodicidad de los púlsares.

Las estrellas de neutrones conocidas como magnetares tienen los campos magnéticos más fuertes, en el rango de 10^8 a 10^{11} T, y se han convertido en una hipótesis aceptada explicar para los tipos de estrellas de neutrones repetidoras de rayos gamma suaves (SGR) y púlsares de rayos X anómalos (AXP).

La densidad de energía magnética de un campo de 10^8 T es extrema, superando en gran medida la densidad de masa-energía de la materia ordinaria. Los campos de esta fuerza son capaces de polarizar el vacío hasta el punto de que el vacío se vuelve birrefringente: Los fotones pueden fusionarse o dividirse en dos, y se producen pares virtuales de partícula-antipartícula. El campo cambia los niveles de energía de los electrones y los átomos son forzados a formar cilindros muy finos. A diferencia de lo que ocurre en un púlsar ordinario, el giro magnetar puede ser impulsado directamente por su campo magnético, y éste es lo suficientemente fuerte como para estresar la corteza hasta el punto de fracturarla. Las fracturas de la corteza provocan terremotos estelares, que se observan como estallidos de rayos gamma duros de milisegundos extremadamente luminosos. La bola de fuego queda atrapada por el campo magnético y entra y sale cuando la estrella gira, lo que se observa como una emisión periódica de repetición de rayos gamma suaves (SGR) con un periodo de 5 a 8 segundos y que dura unos minutos.

Una hipótesis es la de la "congelación del flujo", o la conservación del flujo magnético

original durante la formación de la estrella de neutrones. Si un objeto tiene un determinado flujo magnético en su superficie, y esa superficie se reduce a una más pequeña, pero el flujo magnético se conserva, entonces el campo magnético aumenta. Del mismo modo, una estrella en colapso comienza con una superficie mucho mayor que la estrella de neutrones resultante, y la conservación del flujo magnético da lugar a un campo magnético mucho más fuerte. Sin embargo, esta simple explicación no abarca completamente la intensidad del campo magnético de las estrellas de neutrones.

Gravedad y ecuación de estado

Como hemos mencionado antes, el campo gravitatorio en la superficie de una estrella de neutrones es unas 2×10^{11} veces más fuerte que en la tierra, con unos $2 \times 10^{12} \text{ m s}^{-2}$. Un campo gravitatorio tan fuerte actúa como una lente gravitatoria y desvía la radiación emitida por la estrella de neutrones de forma que partes de la superficie posterior, normalmente invisible, se hacen visibles. Si el radio de la estrella de neutrones es de $3GM/c^2$ o menos, entonces los fotones pueden quedar atrapados en una órbita, con lo que toda la superficie de esa estrella de neutrones se hace visible desde un único punto de observación, junto con las órbitas de fotones desestabilizadoras en la distancia de 1 radio de la estrella o por debajo de ella.

Una fracción de la masa de una estrella que colapsa para formar una estrella de neutrones se libera en la explosión de supernova de la que se forma (a partir de la ley de equivalencia masa-energía, $E = mc^2$). La energía proviene de la energía de enlace gravitacional de una estrella de neutrones.

Por tanto, la fuerza gravitatoria de una estrella de neutrones típica es enorme. Si un objeto cayera desde una altura de un metro sobre una estrella de neutrones de 12 kilómetros de radio, llegaría al suelo a unos 1.400 kilómetros por segundo. Sin embargo, incluso antes del impacto, la fuerza de marea tan fuerte que sufriría el objeto, lo rompería completamente, de forma que quedaría convertido en una mera corriente de material, sin ninguna memoria de lo que fue su estructura inicial.

Debido a la enorme gravedad, la dilatación del tiempo entre una estrella de neutrones y la tierra es importante. Por ejemplo, en la superficie de una estrella de neutrones podrían pasar ocho años, pero en la tierra habrían pasado diez, sin incluir el efecto de dilatación del tiempo por la rapidísima rotación de la estrella.

Las ecuaciones de estado relativistas de las estrellas de neutrones describen la relación entre el radio y la masa para varios modelos. Los radios más probables para una masa dada de la estrella de neutrones están entre los modelos AP4 (radio más pequeño) y MS2 (radio más grande). EB es la relación entre la masa de energía de enlace gravitacional equivalente a la masa gravitacional observada de la estrella de neutrones de M kilogramos con radio R metros.

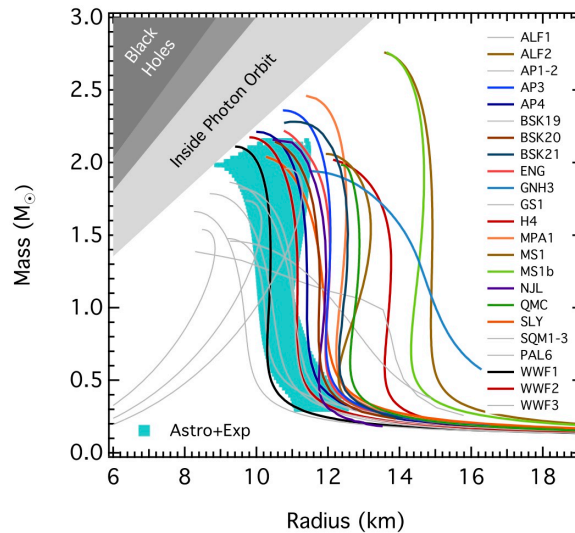


Figura 6.16: Relación masa-radio predicha por diferentes ecuaciones de estado de una estrella de neutrones. Esta figura se basa en los resultados de [31].

Una estrella de neutrones de $2 M_{\odot}$ no sería más compacta que 10.970 metros de radio (modelo AP4). Su fracción de masa de energía de enlace gravitacional sería entonces de 0,187, -18,7 % (exotérmica). Esto no se acerca a $0,6/2 = 0,3$, -30 %.

La ecuación de estado de una estrella de neutrones aún no se conoce. Se supone que difiere mucho de la de una enana blanca, cuya ecuación de estado es la de un gas degenerado que puede describirse de acuerdo con la relatividad especial. Sin embargo, en el caso de una estrella de neutrones ya no se pueden ignorar los efectos crecientes de la relatividad general. Se han propuesto varias ecuaciones de estado (FPS, UU, APR, L, SLy, y otras) y la investigación actual sigue intentando restringir las teorías para hacer predicciones sobre la materia de las estrellas de neutrones. Esto significa que la relación entre la densidad y la masa no se conoce del todo, y esto provoca incertidumbres en las estimaciones del radio.

Esto es lo más interesante del estudio de la ecuación de estado de una estrella de neutrones. Como la predicción de cómo se relacionan la masa y el radio dependen de esta ecuación, como podemos ver en la figura 6.16, si averiguamos esta relación, podemos inferir cuál de todas las ecuaciones es la correcta. Esto nos llevaría a comprender cuál de todas esas formulaciones del comportamiento de la materia es la correspondiente al universo en el que vivimos. Esto, a su vez, nos permitiría derivar propiedades sobre el origen del universo, cuando la curvatura era tan extrema que la materia se veía en condiciones incomparables a lo que podemos encontrar hoy.

Púlsares

Un púlsar (del inglés, “pulsating radio source”, una fuente de radio pulsante) es una estrella de neutrones en rotación altamente magnetizada que emite haces de radiación electromagnética a partir de sus polos magnéticos. Esta radiación sólo puede observarse cuando el haz de emisión apunta hacia la tierra (de forma similar a como se ve un faro sólo cuando la luz apunta en la dirección del barco), y es responsable de la apariencia pulsante de la emisión.

Las estrellas de neutrones, como se le habrá explicado ya al alumnado, son muy densas y tienen períodos de rotación cortos y regulares. Esto produce un intervalo muy preciso entre los pulsos que oscila entre milisegundos y segundos para un púlsar individual. Los púlsares son uno de los candidatos a ser la fuente de los rayos cósmicos de ultra alta energía. (Véase también el mecanismo de aceleración centrífuga).

Los períodos de los púlsares los convierten en herramientas muy útiles en astrofísica. Las observaciones de un púlsar en un sistema binario de estrellas de neutrones sirvieron para confirmar indirectamente la existencia de la radiación gravitacional. En 1992 se descubrieron los primeros planetas extrasolares alrededor de un púlsar, el PSR B1257+12. En 1983 se detectaron ciertos tipos de púlsares que, en aquella época, superaban la precisión de los relojes atómicos en el mantenimiento del tiempo.

Llegados a este punto, es importante darle a los estudiantes un poco de contexto histórico, y también hacer justicia a la descubridora de estos objetos, Jocelyn Bell.

El descubrimiento lo hizo cuando analizaba los datos registrados el 6 de agosto de 1967 por un radiotelescopio recién puesto en servicio que ella ayudó a construir. Su supervisor, Antony Hewish, desarrollador del telescopio, descartó inicialmente que se tratara de una interferencia de radio, pero el hecho de que las señales aparecieran siempre con la misma declinación y ascensión recta pronto descartó que se tratara de una fuente terrestre.

El 28 de noviembre de 1967, Bell y Hewish resolvieron las señales con una grabadora rápida como una serie de pulsos espaciados uniformemente cada 1,33 segundos. Nunca antes se había observado un objeto astronómico de esta naturaleza. El 21 de diciembre, Bell descubrió un segundo púlsar, lo que desmintió las especulaciones de que se tratara de señales enviadas a la tierra por una inteligencia extraterrestre.

Cuando las observaciones con otro telescopio confirmaron la emisión, eliminó cualquier tipo de efecto instrumental. En ese momento, Bell dijo de sí misma y de Hewish que “no creíamos realmente que hubiéramos captado señales de otra civilización, pero obviamente la idea se nos había pasado por la cabeza y no teníamos pruebas de que fuera una emisión de radio totalmente natural. Es un problema interesante: si uno cree que puede haber detectado vida en otro lugar del universo, ¿cómo anuncia los resultados de forma responsable?”

Aun así, apodaron la señal LGM-1, por “hombrecitos verdes” (“little green men”, LGM),

un apodo divertido para designar a los seres inteligentes de origen extraterrestre. No fue hasta que se descubrió una segunda fuente pulsante en otra parte del cielo que se abandonó por completo la “hipótesis del LGM”. Su púlsar fue bautizado posteriormente como CP 1919, y en la actualidad se conoce con varios nombres, como PSR B1919+21 y PSR J1921+2153. Aunque el CP 1919 emite en longitudes de onda de radio, posteriormente se ha descubierto que los púlsares emiten en longitudes de onda de luz visible, rayos X y gamma.

Pérdida de giro

Con el tiempo, las estrellas de neutrones se ralentizan, ya que sus campos magnéticos giratorios irradian energía asociada a la rotación; las estrellas de neutrones más antiguas pueden tardar varios segundos en cada revolución. A esto se le llama disminución del giro o, en inglés, *spin down*. La velocidad a la que una estrella de neutrones reduce su rotación suele ser constante y muy pequeña.

El tiempo asociado a este problema es el período de rotación, el tiempo que dura una rotación de una estrella de neutrones. La velocidad de giro, la tasa de disminución de la rotación, recibe el símbolo $\dot{P}$. Es decir, la derivada de P con respecto al tiempo. Se define como el incremento periódico del tiempo por unidad de tiempo; es una cantidad adimensional, pero se le pueden dar las unidades de $s \cdot s^{-1}$ (segundos por segundo).

La velocidad de giro ($\dot{P}$) de las estrellas de neutrones suele estar en el rango de 10^{-22} a $10^{-9} s \cdot s^{-1}$, y las estrellas de neutrones período más corto (o de rotación más rápida) suelen tener valores de $\dot{P}$ más pequeños. A medida que una estrella de neutrones envejece, su rotación disminuye (es decir, P aumenta); finalmente, la tasa de rotación será demasiado lenta para alimentar el mecanismo de emisión de radio, y la estrella de neutrones ya no se puede detectar.

P y $\dot{P}$ permiten estimar los campos magnéticos mínimos de las estrellas de neutrones, pero también pueden utilizarse para calcular la edad característica de un púlsar, aunque con una estimación que es algo mayor que la edad real cuando se aplica a púlsares jóvenes. Es interesante crear un diagrama P - $\dot{P}$, porque al ojo del experto contiene una enorme cantidad de información sobre la población de púlsares y sus propiedades, y ha sido comparado con el diagrama de Hertzsprung-Russell en su importancia para las estrellas de neutrones. En la figura 6.17, del trabajo de [32], podemos ver un ejemplo.

Estas cantidades también pueden combinarse con el momento de inercia de la estrella de neutrones para estimar una cantidad llamada la “luminosidad de giro”, que recibe el símbolo $\dot{E}$. No se trata realmente de una luminosidad medida como tal, sino de la tasa de pérdida calculada de energía rotacional que se manifestaría como radiación.

En el caso de las estrellas de neutrones en las que la luminosidad de rotación es comparable a la luminosidad real, se dice que las estrellas de neutrones están “alimentadas por

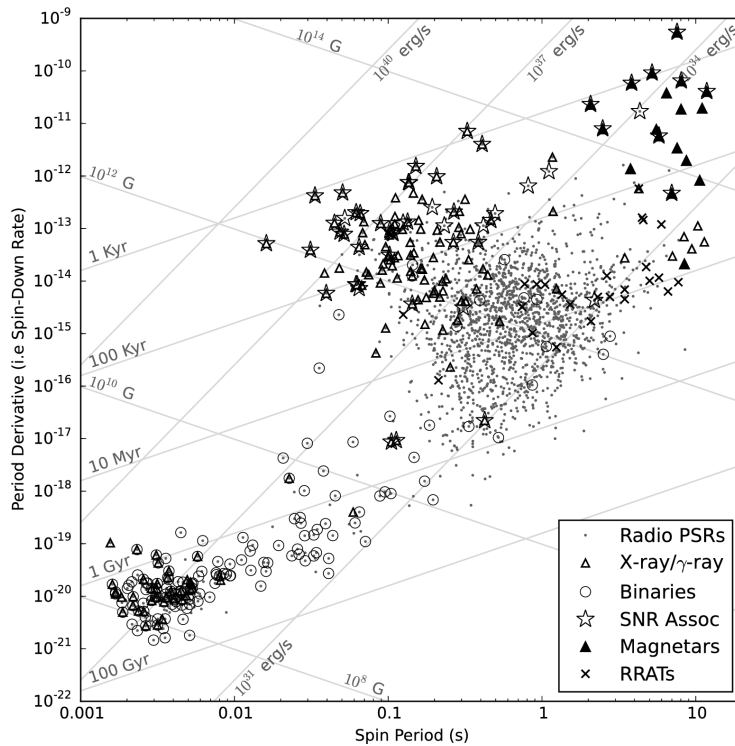


Figura 6.17: Este tipo de diagrama $P-\dot{P}$ es útil para seguir la vida de los pulsares, desempeñando un papel similar al del diagrama de Hertzsprung-Russell para las estrellas ordinarias. Codifica una enorme cantidad de información sobre la población de pulsares y sus propiedades en términos de los observables P (el período de giro) y $\dot{P}$ (la derivada temporal del período de giro). La edad característica de cada pulsar τ , la intensidad mínima del campo magnético B y la luminosidad de espín $-\dot{E}$ se determinan por su ubicación en el diagrama $P-\dot{P}$, como indican las líneas de contorno para estas cantidades. Los pulsares jóvenes situados en la parte media superior del diagrama suelen estar asociados a remanentes de supernova (SNR) y emiten radiación de alta energía. Se relentizan con el tiempo y evolucionan a lo largo de millones de años hasta convertirse en una de las grandes poblaciones de pulsares “lentos” de $P \approx 1$, hasta que su tasa de rotación es demasiado lenta como para alimentar el mecanismo de emisión de radio, y desaparecen de las observaciones. Los radio transitorios giratorios (RRAT, por sus siglas en inglés) son pulsares que emiten esporádicamente pulsos simples en lugar de trenes de pulsos continuos. Los pulsares de milisegundos de la parte inferior izquierda se encuentran en su mayoría en sistemas binarios y son reciclados mediante la acreción de sus estrellas compañeras.

la rotación". La luminosidad observada del púlsar del Cangrejo es comparable a la luminosidad de rotación, lo que apoya el modelo de que la energía cinética de rotación potencia la radiación de la misma. En el caso de las estrellas de neutrones, como los magnetares, en los que la luminosidad real excede la luminosidad de giro por un factor de cien aproximadamente, se asume que la luminosidad se alimenta por la disipación magnética, y no por la rotación.

Incremento de giro

Sin embargo, la velocidad de rotación de las estrellas de neutrones puede aumentar, un proceso conocido como "spin up" en inglés. A veces, las estrellas de neutrones absorben materia en órbita de estrellas compañeras, lo que aumenta la velocidad de rotación y remodela la estrella de neutrones en un esferoide oblato. Esto provoca un aumento de la velocidad de rotación de la estrella de neutrones de más de cien veces por segundo en el caso de los púlsares de milisegundos.

La estrella de neutrones de rotación más rápida que se conoce en la actualidad, la PSR J1748-2446ad, gira a 716 revoluciones por segundo. Un artículo de 2007 informó de la detección de una oscilación de ráfaga de rayos X, que proporciona una medida indirecta del giro, de 1122 Hz de la estrella de neutrones XTE J1739-285 [33], lo que sugiere 1122 rotaciones por segundo. Sin embargo, por el momento, esta señal sólo se ha visto una vez, y debe considerarse tentativa hasta que se confirme.

Ejercicios de estrellas de neutrones

Ejercicio 1

Una estrella de neutrones de masa inicial de $1,2 M_{\odot}$ acreta masa de una estrella compañera. La tasa a la que la masa se elimina por de la superficie de la estrella compañera es $\dot{M}_{\text{tydal}} \sim 10 - 7 M_{\odot} \text{yr}^{-1}$. Calcule la tasa de acreción en la estrella de neutrones durante su crecimiento en masa (no solo en la fase inicial) suponiendo que el proceso de acreción está limitado por Eddington. Calcule la vida de la estrella de neutrones. Para ambas preguntas comente la suposición que haga sobre la proporción M/R de la estrella de neutrones.

Ejercicio 2

Las estrellas de neutrones son muy calientes, algo así como un millón de K para una joven. Los objetos calientes brillan intensamente, entonces, ¿por qué las estrellas de neutrones son difíciles de ver?

Ejercicio 3

Las estrellas de neutrones pueden tener temperaturas superficiales de un millón de K. ¿Por qué son tan calientes, si no tienen una fuente interna de energía de fusión?

Ejercicio 4

Algunos de los púlsares más rápidos conocidos (púlsares de milisegundos) se encuentran en cúmulos globulares. ¿Podríamos esperar encontrar púlsares rápidos en cúmulos globulares frecuentemente?

Ejercicio 5

¿Cuáles son las dos razones principales por las que no todas las estrellas de neutrones corresponden a un púlsar?

Ejercicio 6

Un púlsar binario es un púlsar con un compañero binario, a menudo una enana blanca o una estrella de neutrones. En al menos un caso, el púlsar doble PSR J0737-3039, la estrella de neutrones compañera también es otro púlsar. Los púlsares binarios son uno de los pocos objetos que permiten a los físicos probar la relatividad general debido a los fuertes campos gravitatorios en sus proximidades. Aunque el compañero binario del púlsar suele ser difícil o imposible de observar directamente, su presencia se puede deducir de la sincronización de los pulsos del púlsar mismo, que se puede medir con extraordinaria precisión mediante radiotelescopios.

El tamaño de la órbita de uno de estos sistemas binarios se reduce en unos 3 milímetros por revolución, de acuerdo con la disminución observada en el período orbital. A ese ritmo, ¿cuánto tiempo tardarán en fusionarse las dos estrellas de neutrones del PSR J0737-3039?

6.4. Tema III: Enanas blancas

Conceptos generales

Una enana blanca (WD, por su nombre en inglés) es un fósil del núcleo estelar compuesto en su mayor parte por materia degenerada de electrones. Una enana blanca es muy densa: su masa es comparable a la del sol, mientras que su volumen es comparable al de la tierra. La débil luminosidad de una enana blanca procede de la emisión de energía térmica residual; en una enana blanca no se produce fusión.

Las enanas blancas son los restos estelares de estrellas de masa baja e intermedia. Las estrellas con masa $\lesssim 0,5M_{\odot}$ no tienen suficiente energía gravitacional para calentar su núcleo hasta la temperatura necesaria para encender la fusión del He, y terminarán como enanas blancas de He. Otra vía para la creación de una WD con núcleo de He puede ser a través de la evolución binaria, en la que las capas externas de una estrella en proceso de convertirse en gigante roja pueden ser despojadas por la atracción gravitatoria de su compañera binaria. Si la transferencia de masa se produce antes de la ignición del He, la evolución posterior de la estrella se detiene, dejando una enana blanca compuesta principalmente por He.

Su nombre está relacionado con el hecho de que son calientes y compactas, y ocupan una estrecha franja en el diagrama H-R que es aproximadamente paralela a la secuencia principal y está muy por debajo de ella. Sin embargo, el nombre en sí mismo es un poco inapropiado, ya que las enanas blancas se presentan en todos los colores, con temperaturas superficiales que van desde $T_{\text{eff}} < 5000 \text{ K}$ a $T_{\text{eff}} > 80000 \text{ K}$. El núcleo de una enana blanca es principalmente He o C y O.

Las estrellas con masas $M \simeq 1 - 8M_{\odot}$ evolucionan dejando una enana blanca con un núcleo de CO de masa $M \simeq 0,6M_{\odot}$ tras la expulsión de las capas externas de la estrella en la etapa de nebulosa planetaria. En cualquiera de los casos, sin una fuente interna de energía, las enanas blancas simplemente se enfrían a un radio esencialmente constante a medida que van agotando su suministro de energía térmica.

La enana blanca conocida más cercana es Sirio B, a 8,6 años luz, el componente más pequeño de la estrella binaria Sirio. En la actualidad se cree que hay ocho enanas blancas entre los cien sistemas estelares más cercanos al sol. La inusual debilidad de las enanas blancas fue reconocida por primera vez en 1910. El nombre de enana blanca fue acuñado por Willem Luyten en 1922. En la figura 6.18 mostramos una ilustración de este sistema.

Como hemos mencionado, se cree que las enanas blancas son el estado evolutivo final de las estrellas cuya masa no es lo suficientemente alta como para convertirse en una estrella de neutrones o en un agujero negro. Esto incluye a más del 97 % de las demás estrellas de la Vía Láctea. Una vez finalizado la fase de fusión del hidrógeno de una estrella de la secuencia principal de masa baja o media, dicha estrella se expandirá hasta convertirse en una gigante roja, durante la cual fusionará el helio con el carbono y el oxígeno en su núcleo mediante el proceso triple alfa.

Si una gigante roja no tiene suficiente masa para generar las temperaturas del núcleo necesarias para fusionar el carbono (alrededor de 1.000 millones de K), se acumulará una masa inerte de carbono y oxígeno en su centro. Después de que una estrella de este tipo se desprenda de sus capas exteriores y forme una nebulosa planetaria, dejará atrás un núcleo, que es la enana blanca remanente.

El material de una enana blanca ya no experimenta reacciones de fusión, por lo que la estrella no tiene ninguna fuente de energía. En consecuencia, no puede sostenerse por el



Figura 6.18: Sirius B comparado con Sirius A, una estrella de tipo A. Figura de Steve Bowers.

calor generado por la fusión contra el colapso gravitatorio, sino que se sostiene únicamente por la presión de degeneración de los electrones, lo que hace que sea extremadamente densa. La física de la degeneración establece una masa máxima para una enana blanca no giratoria, el límite de Chandrasekhar -aproximadamente $1,44 M_{\odot}$, más allá del cual no puede sostenerse por la presión de degeneración de los electrones. Una enana blanca de carbono-oxígeno que se acerque a este límite de masa, normalmente por transferencia de masa desde una estrella compañera, puede explotar como supernova de tipo Ia mediante un proceso conocido como detonación del carbono.

Una enana blanca está muy caliente cuando se forma, pero como no tiene ninguna fuente de energía, se enfriará gradualmente al irradiar su energía. Esto significa que su radiación, que inicialmente tiene una alta temperatura de color, disminuirá y se enrojecerá con el tiempo. A lo largo de mucho tiempo, una enana blanca se enfriará y su material comenzará a cristalizarse, empezando por el núcleo. La baja temperatura de la estrella significa que ya no emitirá calor o luz significativos, y se convertirá en una enana negra fría. Debido a que se calcula que el tiempo que tarda una enana blanca en alcanzar este estado es mayor que la edad actual del universo conocido (aproximadamente 13.800 millones de años), por lo que se cree que todavía no existen enanas negras.

Las enanas blancas más antiguas conocidas todavía irradian a temperaturas de unos pocos miles de kelvins, lo que establece un límite observacional sobre la edad máxima posible del universo.

El límite de Chandrasekhar

En su viaje de la India a Cambridge, Chandrasekhar descubrió que existe una masa máxima para una enana blanca, que ahora se conoce generalmente como el límite de Chandrasekhar y que se estima en $1,44M_{\odot}$.

Para ver cómo surge este límite, podemos estimar la densidad de energía del gas degenerado integrando sobre el espacio de momento e incluyendo un término, $\epsilon(p)$, para denotar la energía por modo,

$$U = g \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} \epsilon(p) f(p) 4\pi p^2 dp. \quad (6.33)$$

En el límite de temperatura cero, $f(p) = 1$ hasta el momento de Fermi y $f(p) = 0$ en todos los demás valores. En el caso relativista, con $\epsilon(p) = pc$, la integración de esta igualdad nos lleva a

$$U_e = g \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{4} 4\pi c p_F^4. \quad (6.33)$$

Si expresamos U_e en términos de la densidad de número de electrones, tenemos:

$$U_e = \frac{3}{4} \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{1/3} \hbar c n_e^{4/3} \quad (6.33)$$

En el caso no relativista, $\epsilon(p) = p^2/2m_e$, con lo que

$$U_e = \frac{3\hbar^2}{10m_e} \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{2/3} n_e^{5/3} \quad (6.33)$$

La energía cinética total suministrada por los electrones degenerados es proporcional a su densidad de energía por el volumen. En el caso relativista, $E_K \propto U_e V \propto n_e^{4/3} V \propto M^{4/3}/R$, con M la masa y R el radio. Por otro lado, la energía gravitatoria es proporcional a $-M^2/R$. La energía total es la suma de los dos términos:

$$E_{\text{tot}} = \frac{(AM^{4/3} - BM^2)}{R}, \quad (6.33)$$

con A y B constantes.

Ahora vemos que hay una masa crítica para la que los dos términos de la son iguales. Si la masa es menor que este límite, entonces la energía total es positiva y se reducirá haciendo que la estrella se expanda hasta que los electrones alcancen el régimen ligeramente relativista y la estrella pueda existir como una enana blanca estable. Pero si la masa supera el valor crítico, la energía de enlace aumenta sin límite mientras la estrella se encoge: el colapso gravitatorio se ha vuelto imparable. Se cree que éste es el mecanismo responsable de la producción de supernovas de tipo Ia.

Para encontrar la masa límite exacta, necesitamos encontrar los coeficientes A y B anteriores, donde el argumento ha supuesto implícitamente que la estrella es de densidad constante. En esta aproximación, las energías cinética y potencial son

$$E_K = \left(\frac{243\pi}{128g} \right)^{1/3} \frac{\hbar c}{R} \left(\frac{M}{\mu m_p} \right)^{4/3} \quad (6.33)$$

donde la masa por electrón es μm_p , de forma que

$$E_V = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (6.33)$$

Igualando los dos términos, tenemos

$$M_{\text{crit}} = \frac{3,7}{\mu^2} \left(\frac{2}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} m_p^{-2} \simeq \frac{7}{\mu^2} M_{\odot} \quad (6.33)$$

para $g = 2$. En una estrella que ha quemado la mayor parte de su combustible inicial en elementos más pesados que el helio $\mu \simeq 2$, de tal forma que $M_{\text{crit}} = 1,75 M_{\odot}$. Cálculos más precisos, que tienen en cuenta el perfil de densidad dentro de la enana blanca dan el resultado conocido de $M_{\text{crit}} = 1,44 M_{\odot}$.

La relación entre la masa y el volumen

Como se ha explicado en la introducción, las enanas blancas son objetos extremadamente compactos. Para encontrar su radio, consideramos el caso no relativista en el que la densidad de energía es $U_e \propto n_e^{5/3}$, de modo que la energía cinética total es $E_K = CM^{5/3}/R^2$, con C una constante. Por otra parte, la energía potencial gravitatoria es $E_V = -BM^2/R$, y la energía total es la suma de los dos términos. El radio de equilibrio se encuentra imponiendo la condición $dE_{\text{tot}}/dr = 0$, lo que nos da

$$R = \frac{2C}{B} M^{-1/3} \quad (6.33)$$

Esta es una relación importante, porque como $V \propto R^3$,

$$M_{\text{WD}} V_{\text{WD}} = \text{constante}. \quad (6.33)$$

Es decir, las enanas blancas más masivas son en realidad más pequeñas. Este sorprendente resultado es consecuencia de que la estrella obtiene su apoyo de la presión de degeneración de electrones.

Los electrones deben estar más estrechamente confinados para generar la mayor presión de degeneración necesaria para sostener una estrella más masiva. Por lo tanto, la relación masa-volumen implica que $\rho \propto M_{\text{WD}}^2$.

Obsérvese también que la ecuación 6.4 parece implicar que el volumen de una enana blanca puede hacerse infinitamente pequeño para una masa arbitrariamente grande. Esta es otra forma de reconocer la existencia de una masa crítica; la primera afirmación es incorrecta porque ignora los efectos relativistas.

Podemos definir mejor esto teniendo en cuenta que

$$n_e = \frac{M}{\mu m_p} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)^{-1} \quad (6.33)$$

que, combinado con la ecuación 6.4, da

$$C = \frac{3\hbar^2}{10m_e} \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{2/3} \left(\frac{1}{\mu m_p} \right)^{5/3} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{-2/3}. \quad (6.33)$$

Como $B = 3G/5$,

$$R = \frac{3}{2} \left(\frac{6\pi^2}{g^2} \right)^{1/3} \frac{\hbar^2}{Gm_e (\mu m_p)^{5/3}} M^{-1/3}, \quad (6.33)$$

por lo que, en función de la masa de Chandrasekhar,

$$R = 3\sqrt{\pi/5} \frac{\hbar}{\mu m_p m_e} \left(\frac{2\hbar}{gcG} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{M_{\text{crit}}} \right)^{-1/3} \simeq 5975 \left(\frac{M}{M_{\text{crit}}} \right)^{-1/3} \text{ km}, \quad (6.33)$$

donde de nuevo hemos tomado $g = 2$ y $\mu \simeq 2$. En otras palabras, una enana blanca con la masa Chandrasekhar tiene el tamaño de la tierra. Se trata de una densidad extremadamente alta, que puede evaluarse como

$$\rho = \frac{M}{4\pi R^3/3} \simeq 10^{6,6} \left(\frac{M}{M_{\text{crit}}} \right)^2 \text{ g cm}^{-3} \quad (6.33)$$

Es necesario recordar al alumnado que para estos cálculos nos hemos basado en una aproximación en la que la densidad es constante, por lo que el resultado no es todo lo exacto que podría ser. Si quisiéramos hacerlo mejor, tendríamos que resolver la estructura interna de una enana blanca. En resumen, las enanas blancas no relativistas son estables en un rango de masas, pero a medida que su masa aumenta, se reducen. Por el principio de incertidumbre, esto debe forzar a los electrones a volverse cada vez más relativistas, y el límite de esto es una estrella en la que los electrones son todos relativistas, que tiene una masa única. Parece que la presión de degeneración de los electrones no puede soportar cuerpos más masivos.

Relación entre el radio y la masa

La energía total de una enana blanca se obtiene sumando la energía potencial gravitatoria y la energía cinética. La energía potencial gravitatoria por unidad de masa de una enana blanca viene dada por $E_g = GM/R$, donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa de la enana blanca, y R es su radio.

La energía cinética, E_c , se incrementa al aumentar el movimiento de los electrones, y su ecuación es $E_c = Np^2/(2m)$, donde p es la cantidad de movimiento media de los electrones, m es la masa del electrón, y N es el número de electrones por unidad de masa. Debido a que los electrones están degenerados, podemos estimar p por estar en función de la cantidad de movimiento, dada por el principio de incertidumbre, que afirma que $\nabla p \nabla x$ está en función de la constante reducida de Planck.

Por otra parte, ∇x está en función de la distancia media entre electrones, cuyo valor es aproximadamente $n^{-1/3}$, es decir, la inversa de la raíz cúbica de la densidad numérica de los electrones, n , por unidad de volumen. Como en una enana blanca hay $N M$ electrones y su volumen está en función de R , n vendrá dada por NM/R^3 . Por lo tanto, sustituyendo sobre la ecuación de la energía cinética, E_c , obtenemos:

$$E_c \approx \frac{N(\Delta p)^2}{2m} \approx \frac{N\hbar^2 n^{2/3}}{2m} \approx \frac{M^{2/3} N^{5/3} \hbar^2}{2mR^2} \quad (6.33)$$

La enana blanca estará en equilibrio cuando su energía total $E_g + E_c$ sea mínima. En ese momento, las energías potencial y cinética se pueden comparar, y derivan en una relación entre la masa y el radio al equiparar sus magnitudes:

$$|E_g| \approx \frac{GM}{R} = E_c \approx \frac{M^{2/3} N^{5/3} \hbar^2}{2mR^2} \quad (6.33)$$

Al despejar el radio, R , obtenemos

$$R \approx \frac{N^{5/3} \hbar^2}{2mGM^{1/3}} \quad (6.33)$$

Si eliminamos N de la ecuación, la cual depende solamente de la composición de la estrella, y de la constante de gravitación universal, G , obtenemos que $R \sim M^{-1/3}$. Es decir, el radio de una enana blanca es inversamente proporcional a la raíz cúbica de su masa.

Sin embargo, este razonamiento incluye la fórmula $p^2/(2m)$ para la energía cinética, que se trata de una fórmula no relativista. Si quisiéramos introducir cálculos relativistas para cuando las velocidades de los electrones se acerquen a la velocidad de la luz, c , deberíamos sustituir la energía cinética por la aproximación relativista pc . Es decir, $E_{c \text{ relativista}} \approx M^{1/3} N^{4/3} \hbar c / R$. Igualando esta ecuación a la ecuación de la energía potencial gravitatoria, E_g , podemos eliminar R , y la masa, M ,

$$M_{\text{lim}} \approx N^2 \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \quad (6.33)$$

Si añadimos masa a una enana blanca, su radio disminuye, y según el principio de incertidumbre, la cantidad de movimiento, y por tanto la velocidad de los electrones, aumenta. A medida que aumenta esta velocidad y se va aproximando a la velocidad de la luz, los cálculos se vuelven más exactos, lo que significa que la masa de la enana blanca M se va aproximando a M_{lim} . Por lo tanto, se demuestra así que ninguna enana blanca puede ser más pesada que el límite de masa.

Pérdida de calor: edad de una enana blanca

Una vez terminadas las reacciones nucleares, la enana blanca se enfriará lentamente con el tiempo, irradiando el calor almacenado. Se han dedicado muchos esfuerzos a comprender el proceso y la escala de tiempo del enfriamiento de las enanas blancas, ya que puede proporcionar una cronología de la historia pasada de la formación estelar en nuestra galaxia, como mencionábamos al principio.

En las estrellas como nuestro sol el camino libre medio de los fotones es mucho mayor que el de los electrones o los átomos; en consecuencia, el transporte de energía se realiza principalmente por difusión radiativa. Este no es el caso en las enanas blancas, en las que los electrones degenerados pueden viajar largas distancias antes de perder energía en una colisión con un núcleo, ya que la gran mayoría de los estados de los electrones de menor energía ya están ocupados. Así, en una enana blanca la energía se transporta por conducción de electrones (similar a la conducción en los metales), en lugar de por radiación.

La conducción de electrones es tan eficiente que el interior de una enana blanca es casi isotérmico, con la temperatura cayendo significativamente sólo en las capas superficiales no degeneradas. La delgada envoltura no degenerada transfiere el calor de forma menos eficiente, y actúa como una manta aislante, haciendo que la energía se escape lentamente. El pronunciado gradiente de temperatura cerca de la superficie crea zonas de convección que pueden alterar el aspecto del espectro de una enana blanca a medida que se enfría.

Podemos calcular la temperatura inicial de una enana blanca recordando que se forma a partir de la contracción de un núcleo estelar sin soporte térmico, de masa M , hasta el radio en el que la presión de degeneración detiene la contracción. El teorema del virial nos dice que, justo antes de alcanzar el punto final de equilibrio, la energía térmica será igual a la mitad de la energía potencial

$$E_{\text{th}} \sim \frac{1}{2} \frac{GM^2}{R}. \quad (6.33)$$

Para una composición de He puro, el número de núcleos en el núcleo es $M/4m_p$, y el nú-

mero de electrones es $M/2m_p$. Por lo tanto, la energía térmica total -que, una vez que se produzca la degeneración, dejará de desempeñar un papel en el soporte de la estrella contra la gravedad- es

$$E_{\text{th}} = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} \frac{M}{m_p} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) k T = \frac{9}{8} \frac{M}{m_p} k T, \quad (6.33)$$

y, como

$$k T \sim \frac{4}{9} \frac{G M m_p}{R}, \quad (6.33)$$

sustituyendo el radio de equilibrio de una enana blanca encontramos que

$$k T \propto M^{4/3} \simeq 1,1 \times 10^{-7} \text{erg} \sim 70 \text{keV} \quad (6.33)$$

para una enana blanca típica de $0,5 M_{\odot}$. Teniendo en cuenta que $k = 1,38 \times 10^{-16} \text{ergK}^{-1}$, la temperatura correspondiente es de $T \sim 8 \times 10^8 \text{K}$. Claramente, un núcleo degenerado recién formado es un objeto muy caliente, con una emisión térmica que alcanza su máximo en las longitudes de onda de los rayos X. Por eso, una vez que el núcleo se convierte en una enana blanca expuesta, su radiación ioniza las capas de gas que fueron expulsadas durante la fase AGB, dando lugar a una nebulosa planetaria.

La energía que se irradia desde la superficie de una enana blanca es la energía térmica almacenada en el gas de núcleos, todavía clásico, dentro del volumen de la estrella. La degeneración del gas de electrones limita casi por completo la capacidad de los electrones de perder sus energías cinéticas.

Podemos obtener un límite superior de la tasa de enfriamiento despreciando la envoltura, que representa sólo el 1 % del total, y suponiendo una temperatura uniforme en todo el espacio. La pérdida de energía radiativa se obtiene igualando la luminosidad del cuerpo negro, dada por la ley de Stefan-Boltzmann, a la tasa de cambio de energía térmica

$$L = 4\pi R_{\text{WD}}^2 \sigma T^4 \sim \frac{dE_{\text{th}}}{dt} = \frac{3}{8} \frac{M k}{m_p} \frac{dT}{dt}, \quad (6.33)$$

donde hemos incluido sólo la contribución de los núcleos a la energía térmica de la ecuación 6.4.

Ahora podemos separar las variables T y t e integrar para obtener el tiempo de enfriamiento hasta una temperatura determinada de T ,

$$\tau_{\text{enfr}} \sim \frac{3}{8} \frac{M k}{m_p} \frac{1}{4\pi R_{\text{WD}}^2 \sigma} \frac{1}{3} \frac{1}{T^3}. \quad (6.33)$$

Si sustituimos R_{WD} y ponemos los valores numéricos correspondientes, encontramos que

$$\tau_{\text{enfr}} = 3 \times 10^9 \text{yr} \left(\frac{T}{10^3 \text{K}} \right)^{-3}, \quad (6.33)$$

para una masa de $M = 0,5M_{\odot}$. Si expresamos la temperatura en función del tiempo tenemos que

$$\frac{T}{10^3 \text{ K}} \sim \left(\frac{t}{3 \times 10^9 \text{ yr}} \right)^{-1/3}. \quad (6.33)$$

Así, incluso con el enfriamiento poco realista que hemos asumido, una enana blanca de $M = 0,5M_{\odot}$ tardaría varios Gyr en enfriarse hasta 10 K. En realidad, el aislamiento proporcionado por la envoltura no degenerada da lugar a una temperatura efectiva que es significativamente menor que la temperatura interior y, por lo tanto se *reduce* la velocidad de enfriamiento.

Además, cuando una enana blanca se enfría, se cristaliza en un proceso gradual que comienza en el centro y se desplaza hacia el exterior. La estructura cristalina regular se mantiene gracias a la repulsión electrostática mutua de los núcleos: minimiza su energía mientras vibran alrededor de su posición media en la red. A medida que los núcleos experimentan este cambio de fase, el calor latente que se libera se añade al equilibrio térmico, lo que ralentiza aún más el descenso de la temperatura.

Los modelos detallados que incluyen estos y otros procesos para diversas masas y composiciones químicas de las enanas blancas muestran que durante un periodo de 10 Gyr, comparable a la edad del Universo, las enanas blancas no pueden enfriarse por debajo de $\sim 3000\text{--}4000$ K. Esto explica por qué se observa que la mayoría de las enanas blancas tienen altas temperaturas, y de ahí sus que sus colores estén entre el azul y el blanco. Las enanas blancas más frías conocidas tienen temperaturas efectivas $T_{\text{eff}} \simeq 3500$ K.

Ejercicios de enanas blancas

Ejercicio 1

La figura 6.19 muestra la evolución seguida en el diagrama H-R de una enana blanca enfriándose.

Usando la ley de Stefan-Boltzmann, deduzca la pendiente de la línea recta pista seguida por la enana blanca en los dos paneles. ¿Qué diferencia se encuentra con la pendiente observada? ¿Cuál es el radio (en unidades solares) de la enana blanca cuando $L/L_{\odot} = 0,01$?

¿Qué papel desempeña la difusión de elementos en la pendiente? ¿Por qué? Justifique la respuesta.

Ejercicio 2

Derive la expresión general para la presión de degeneración de un gas de Fermi considerando una unidad de área en la pared del recipiente de gas, averiguando la distribución de partículas que golpean esta área en la unidad de tiempo y teniendo en cuenta que

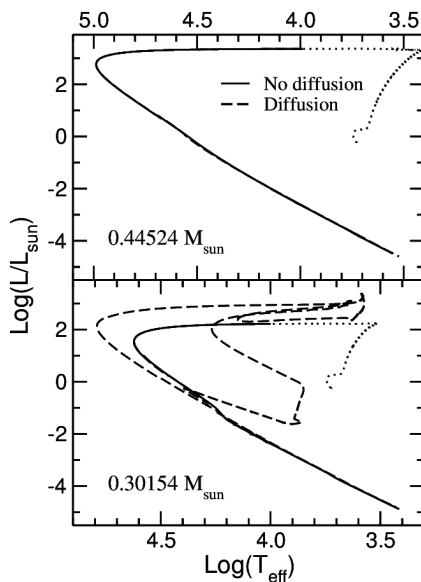


Figura 6.19: Diagrama de Hertzsprung-Russell para secuencias evolutivas de enanas blancas con núcleo de He de una estrella progenitora de metalicidad $Z = 0.05$, de [34]. Las líneas discontinuas (sólidas) corresponden al caso en el que (no) se tiene en cuenta la difusión de elementos. Las líneas punteadas muestran la evolución de la estrella progenitora $1 M_{\odot}$.

el momento cambia ya que las colisiones elásticas proporcionan la presión. A partir de la expresión de la distribución maxwelliana, calcule $f(p)$ para esa distribución y demuestre que la presión ejercida es $n\kappa_B T$.

Ejercicio 3

Demuestre que la expresión general para la presión de degeneración electrónica

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}} dp$$

es igual a

$$P = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} f(x),$$

donde

$$f(x) = x(2x^2 - 3)\sqrt{x^2 + 1} + 3 \sinh^{-1} x$$

y $x = p_F/m_e c$. Evalúe $f(x)$ para varios valores de x y use estos valores para hacer una gráfica de $\log P$ en función de $\log \rho$. Indique las regiones de la gráfica correspondientes a

las dos ecuaciones límite

$$P = K_1 \rho^{5/3}$$

$$P = K_2 \rho^{4/3},$$

con

$$K_1 = \frac{3^{2/3}}{20\pi^{2/3}} \frac{h^2}{m_e m_H^{5/3} \mu_e^{5/3}} = \frac{1,00 \times 10^7}{\mu_e^{5/3}}$$

$$K_2 = \frac{3^{1/3}}{8\pi^{1/3}} \frac{hc}{m_H^{4/3} \mu_e^{4/3}} = \frac{1,24 \times 10^{10}}{\mu_e^{4/3}}$$

Ejercicio 4

Use la regla aproximada de que las enanas blancas tienen aproximadamente el tamaño de la tierra pero con la masa del sol, y las estrellas de neutrones el tamaño de una ciudad, pero con la masa del sol para (1) hacer un bosquejo, a escala, de los tamaños relativos del sol, una enana blanca y una estrella de neutrones y (2) estimar las densidades en gramos por centímetro cúbico para estos tres objetos.

Ejercicio 5

Calcule la luminosidad total esperada en longitudes de onda visibles para una enana blanca de 8000 km de radio y temperatura superficial de 40000 K y una estrella de neutrones de 10 km de radio y temperatura superficial de 10^6 K.

Ejercicio 6

La Nebulosa de Orión (también conocida como Messier 42, M42 o NGC 1976) es una nebulosa difusa situada en la Vía Láctea, al sur del Cinturón de Orión en la constelación de Orión. Es una de las nebulosas más brillantes y es visible a simple vista en el cielo nocturno con magnitud aparente 4.0. Se encuentra a unos 412 pc y es la región de formación de estrellas masivas más cercana a la tierra. Se estima que la nebulosa M42 tiene 24 años luz de diámetro. Tiene una masa de unas 2.000 veces la del sol.

¿Podríamos esperar encontrar enanas blancas en la Nebulosa de Orión? Argumente el motivo.

Ejercicio 7

Si la mayoría de las estrellas se convierten en enanas blancas al final de sus vidas y la formación de enanas blancas va acompañada de la producción de una nebulosa planetaria, ¿por qué hay más enanas blancas que nebulosas planetarias en nuestra galaxia?

Ejercicio 8

Supongamos que una enana blanca particular tiene la masa del sol pero el radio de la tierra. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de la enana blanca? ¿Cuánto mayor es esto que g en la superficie de la tierra?

Ejercicio 9

Si el sol fuera reemplazado por una enana blanca con una temperatura superficial de 10000 K y un radio igual al de la tierra, ¿cómo se compararía su luminosidad con la del sol?

6.5. Tema IV: Acreción

Estructura

La existencia del límite de Eddington proporciona un indicio de que la dinámica del flujo de materia en acreción puede no ser sencilla, lo que demuestra que, al menos para altas tasas de acreción, pueden ser importantes otras fuerzas además de la gravedad.

Además, como se explicará al alumnado, ciertamente en muchos casos y probablemente en la mayoría, la materia acumulada posee un momento angular considerable por unidad de masa que, en modelos realistas, tiene que perder para acumularse. Necesitamos una descripción detallada del flujo de acreción si queremos explicar la distribución espectral observada de la radiación producida.

Las dos herramientas principales que utilizaremos en este estudio son las ecuaciones de la dinámica de gases y la física de los plasmas. Se dará al alumnado una breve introducción a la dinámica de gases y trataremos algunos aspectos de la física del plasma, además de ciertos elementos de la teoría de la transferencia radiativa.

Los puntos más importantes del temario serán los siguientes,

Acreción de objetos de masa estelar en sistemas binarios En estos casos, a menudo encontramos que las observaciones proporcionan evidencia bastante directa de la naturaleza de los sistemas. Por ejemplo, a veces hay evidencia directa de la importancia del momento angular y la existencia de discos de acreción. Esto contrasta mucho con la discusión que le daremos al alumnado sobre

Núcleos galácticos activos La teoría de la acreción surge al final de una secuencia de inducciones plausibles, pero no exentas de problemas. Además, no parece haber evidencia absolutamente convincente a favor o en contra de la existencia de discos de acreción en estos sistemas. Así, mientras que normalmente usamos las observaciones de los sistemas estelares para probar la teoría, para los núcleos activos usamos la teoría, hasta cierto punto, para ilustrar las observaciones. Esto lo enfatizaremos en la parte final de la materia, en la que discutiremos

Discos de acreción finos y otros modelos, para alimentar un núcleo activo alrededor de un agujero negro supermasivo. Por último veremos

Otros mecanismos de acreción la mayoría de los cuales ya habrán sido presentados al alumnado previamente, clasificándolos según qué efectos físicos dominen sus propiedades y comportamiento. Si el tiempo lo permite, presentaremos al alumnado los avances recientes en nuestra comprensión de los flujos de acreción, con especial énfasis en la clase de flujos de acreción dominados por advección o ADAF.

Conceptos generales

Para un cuerpo de masa M y radio R_* , la energía potencial gravitacional liberada por la acreción de una masa m sobre su superficie es

$$\Delta E_{\text{acc}} = GMm/R_*$$

donde G es la constante de gravitación. Si el cuerpo acretando es una estrella de neutrones con radio $R_* \sim 10$ km, masa $M \sim M_\odot$, entonces el rendimiento ΔE_{acc} es de aproximadamente 10^{20} erg g⁻¹. A modo de comparación, se le pedirá al alumnado que calcule que podría extraerse de la masa m mediante reacciones de fusión nuclear. El máximo se obtiene si, como suele ser el caso en astrofísica, el material es inicialmente hidrógeno y la mayor contribución proviene de la conversión de hidrógeno en helio. Esto produce una liberación de energía.

$$\Delta E_{\text{nuc}} = 0,007mc^2$$

donde c es la velocidad de la luz, por lo que obtenemos alrededor de 6×10^{18} erg g⁻¹. Está claro que la eficiencia de la acreción como mecanismo de liberación de energía depende en gran medida de la compacidad del objeto en acreción: cuanto mayor sea la relación M/R_* , mayor será la eficiencia. Por tanto, al tratar la acreción sobre objetos de masa estelar, sin duda querremos considerar las estrellas de neutrones ($R_* \sim 10$ km) y los agujeros negros con radios $R_* \sim 2GM/c^2 \sim 3 (M/M_\odot)$ km. Para las enanas blancas con $M \sim M_\odot$, $R_* \sim 10^9$ cm, la combustión nuclear es más eficiente que la acreción en factores

25 – 50. Sin embargo, sería erróneo concluir que la acreción en las enanas blancas no tiene gran importancia para las observaciones, ya que el argumento no tiene en cuenta la escala de tiempo en la que actúan los procesos nucleares y de acreción.

Para un valor fijo de la compacidad, M/R_* , la luminosidad de un sistema de acreción depende de la velocidad $\dot{M}$ a la que se acumula la materia. A altas luminosidades, la tasa de acreción puede ser controlada por el impulso transferido desde la radiación al material acretado por dispersión y absorción. Bajo ciertas circunstancias, esto puede conducir a la existencia de una luminosidad máxima para una masa dada, generalmente denominada luminosidad de Eddington.

El límite de Eddington

Considere una acreción constante esféricamente simétrica; el límite se puede estimar a orden de magnitud. Suponemos que acretamos hidrógeno completamente ionizado. En estas circunstancias, la radiación ejerce una fuerza principalmente sobre los electrones libres a través de la dispersión de Thomson, ya que la sección eficaz de dispersión de los protones es menor por un factor $(m_e/m_p)^2$, donde $m_e/m_p \cong 5 \times 10^{-4}$ es la relación entre las masas del electrón y del protón. Si S es el flujo de energía radiante ($\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2}$) y $\sigma_T = 6,7 \times 10^{-25} \text{cm}^2$ es la sección transversal de Thomson, entonces la fuerza radial sobre cada electrón es igual a la velocidad a la que absorbe el impulso, $\sigma_T S/c$. Si hay una población sustancial de elementos distintos del hidrógeno que pudiera haber retenido algunos electrones no ionizados, la sección eficaz resultante de la absorción de fotones en las líneas espectrales puede exceder con mucho σ_T . La fuerza de atracción electrostática de Coulomb entre los electrones y los protones significa que a medida que se mueven, los electrones arrastran a los protones con ellos. En efecto, la radiación expulsa pares electrón-protón venciendo la fuerza gravitatoria total $GM(m_p + m_e)/r^2 \cong GMm_p/r^2$ que actúa sobre cada par a una distancia radial r del centro. Si la luminosidad de la fuente de acreción es L (ergs^{-1}), tenemos $S = L/4\pi r^2$ por simetría esférica, por lo que la fuerza interna neta sobre un par electrón-protón es

$$\left(GMm_p - \frac{L\sigma_T}{4\pi c} \right) \frac{1}{r^2}.$$

Hay una luminosidad límite para la que esta expresión es nula, y la denominamos el límite de Eddington,

$$\begin{aligned} L_{\text{Edd}} &= 4\pi GMm_p c / \sigma_T \\ &\cong 1,3 \times 10^{38} (M/M_\odot) \text{ ergs}^{-1} \end{aligned}$$

A mayores luminosidades, la presión de radiación excedería la atracción gravitacional hacia el interior y se detendría la acreción. Si toda la luminosidad de la fuente se derivara

de la acreción, esto apagaría la fuente; si una parte, o la totalidad, se produjera por otros medios, por ejemplo, la energía nuclear, entonces las capas externas de material comenzarían a volar y la fuente no sería estable. Para estrellas con una relación masa-luminosidad dada, este argumento produce una masa máxima estable.

Es importante recordar al alumnado de las aproximaciones que hemos hecho.

1. Hemos supuesto que el flujo de acreción era constante y esféricamente simétrico. Aquí se puede hacer una ligera extensión sin dificultad: si la acreción ocurre solo sobre una fracción f de la superficie de una estrella, pero por lo demás depende solo de la distancia radial r , el límite correspondiente a la luminosidad de acreción es L_{Edd} . Para una geometría más complicada, esta derivación es sólo una estimación aproximada.
2. Más crucial es la suposición de flujo constante. Un ejemplo claro son las supernovas, en las que L_{Edd} se supera en muchos órdenes de magnitud.
3. Las otras suposiciones más son que el material acumulado es en gran parte hidrógeno y que está completamente ionizado. Lo primero es casi siempre una buena aproximación, pero incluso una pequeña mezcla de elementos pesados puede invalidar el segundo. Sin embargo, es probable que se justifique una ionización casi completa en el caso muy común en el que el objeto que se acumula produce gran parte de su luminosidad en forma de rayos X, porque los iones abundantes generalmente se pueden mantener completamente despojados de electrones por una fracción muy pequeña de la luminosidad de rayos X.

A pesar de estas advertencias, el límite de Eddington es de gran importancia práctica, en particular porque ciertos tipos de sistemas muestran una tendencia a comportarse como candelas estándar en el sentido de que sus luminosidades típicas están cerca del límite de Eddington.

Para objetos en los que domina la acreción, el límite de Eddington implica un límite en la tasa de acreción constante, $\dot{M}$ (g s^{-1}). Si toda la energía cinética de la materia que cae se convierte en radiación en la superficie estelar, R_* , entonces la luminosidad de acreción es

$$L_{\text{acc}} = GM\dot{M}/R_*$$

Es útil volver a expresar esta expresión en términos de órdenes típicos de magnitud. Escribiendo la tasa de acreción como $\dot{M} = 10^{16} \dot{M}_{16} \text{ g s}^{-1}$ tenemos

$$\begin{aligned} L_{\text{acc}} &= 1,3 \times 10^{33} \dot{M}_{16} (M/M_{\odot}) (10^9 \text{ cm}/R_*) \text{ ergs}^{-1} \\ &= 1,3 \times 10^{36} \dot{M}_{16} (M/M_{\odot}) (10 \text{ km}/R_*) \text{ ergs}^{-1} \end{aligned}$$

Las cantidades entre paréntesis en estas dos relaciones son de orden unidad para las enanas blancas y las estrellas de neutrones. Dado que 10^{16} g s^{-1} ($\sim 1,5 \times 10^{-10} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$) es un orden de magnitud típico para las tasas de acreción en sistemas binarios cercanos que involucran este tipo de estrellas, tenemos $\dot{M}_{16} \sim 1$, así que las luminosidades $10^{33} \text{ erg s}^{-1}$, $10^{36} \text{ erg s}^{-1}$ son valores típicos de estos sistemas.

Además, se ve inmediatamente que para una acreción constante $\dot{M}_{16}$ está limitada por los valores $\sim 10^5$ y 10^2 respectivamente. Por lo tanto, las tasas de acreción deben ser menores que, aproximadamente, 10^{21} g s^{-1} y 10^{18} g s^{-1} en los dos tipos de sistemas si las suposiciones involucradas en la derivación del límite de Eddington son válidas.

Para el caso de acreción en un agujero negro, no está nada claro que esto se cumpla. El radio no se refiere a una superficie dura, no hay superficie, sino que el concepto de radio se refiere a una región en la que la materia puede caer y de la que no puede escapar. Por lo tanto gran parte de la energía acumulada podría desaparecer en el agujero y simplemente aumentar su masa, en lugar de ser radiada. La incertidumbre en este caso se puede parametrizar mediante la introducción de una cantidad adimensional η , la eficiencia,

$$L_{\text{acc}} = 2\eta GM\dot{M}/R_* = \eta \dot{M}c^2,$$

donde hemos usado $R_* = 2GM/c^2$ para el radio del agujero negro. La ecuación evidencia que η mide la eficiencia con la que la energía de la masa en reposo, c^2 por unidad de masa, del material acumulado se convierte en radiación. Si el material que se acreta en un agujero negro pudiera descender al interior del agujero con una lentitud infinitesimal, toda la energía de la masa restante podría, en principio, extraerse y entonces $\eta = 1$.

Acreción en sistemas binarios

Una forma de evidencia de la existencia de estrellas de neutrones comenzó a llegar aproximadamente al mismo tiempo que se descubrieron los púlsares. Tras el lanzamiento del satélite Uhuru dedicado exclusivamente a la astronomía de rayos X, estas fuentes de rayos X pudieron estudiarse con detalle. Se encontró que la mayoría de estas fuentes estaban en el plano galáctico, lo que indica que son objetos galácticos. Se hizo posible identificar las contrapartidas ópticas de algunas de estas fuentes. Las ópticas eran invariablemente sistemas estelares binarios. Algo debe estar sucediendo en estos binarios para que se produjesen rayos X.

Durante las clases, se intentará reproducir este tipo de línea de pensamiento con el alumnado. El objetivo es que puedan llegar a comprender por qué este tipo de problema suscitó interés y sondas espaciales.

Supongamos que dejamos caer una masa m desde una altura h en un campo gravitacional g . La energía potencial gravitacional mgh se convierte primero en energía cinética y luego, al tocar el suelo, esta energía se transforma en otras formas, como calor y sonido.

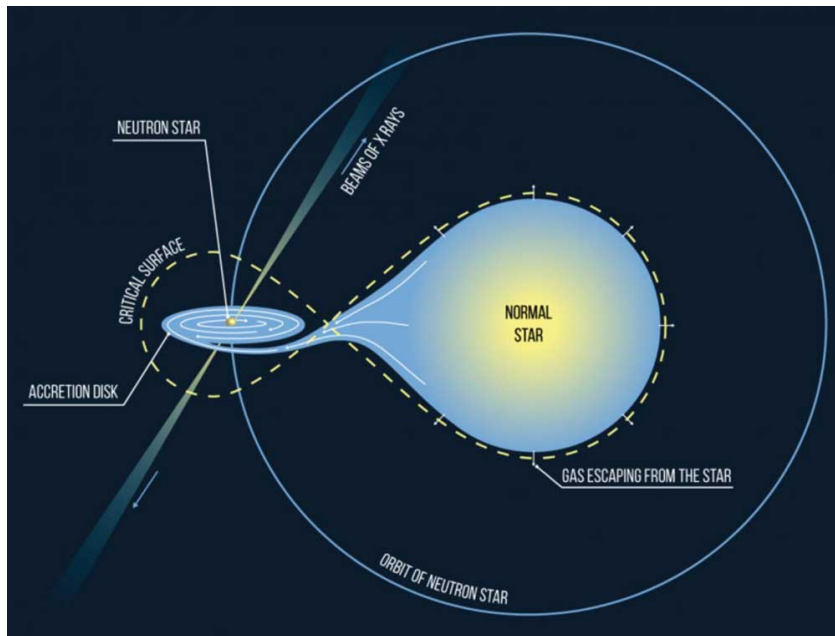


Figura 6.20: Ilustración de un sistema de acreción con rayos X. Fuente: Moscow Institute of Physics and Technology.

Normalmente, en este proceso, se libera una fracción muy pequeña de la energía de la masa restante mc^2 . Sin embargo, si la masa m se deja caer desde el infinito a una estrella de masa M y radio R , entonces la energía gravitatoria perdida es

$$\frac{GM}{R}m = \frac{GM}{c^2 R}mc^2.$$

Para una estrella de neutrones típica de masa $1M_{\odot}$ y radio 10 km, el factor $GM/c^2 R$ resulta ser aproximadamente 0,15. Por lo tanto, la pérdida de energía gravitacional puede ser una fracción muy apreciable de la energía de la masa restante, lo que hace que la caída de materia en el profundo pozo gravitacional de un objeto compacto como una estrella de neutrones sea un proceso tremendamente eficiente para la liberación de energía.

Como sabemos, puede haber transferencia de masa entre las dos estrellas en un sistema binario. Supongamos que un miembro de un binario es un objeto compacto como una estrella de neutrones o un agujero negro, mientras que el otro miembro es una estrella que ha llenado el lóbulo de Roche (que se habrá definido previamente al alumado, claro). La estrella compacta acumulará materia de su compañera. La materia entonces pierde una gran cantidad de energía potencial gravitatoria mientras cae hacia la estrella compacta y esta energía se irradia. En la figura 6.20 mostramos un esquema sencillo de este proceso.

Este parece ser el mecanismo probable por el cual se alimentan la mayoría de las fuen-

tes de rayos X. Se cree que los púlsares de milisegundos son estrellas de neutrones, como el que genera la deposición del momento angular en un proceso de transferencia de masa binaria. Un púlsar de milisegundos es un posible producto final después de que termine la transferencia de masa.

Como el material que se acumula tiene un momento angular, es poco probable que caiga radialmente hacia adentro, pero se espera que se mueva lentamente hacia adentro en forma de disco. Tal disco se llama disco de acreción, como veremos en la sección 6.5. Una cantidad determinada del gas seguirá una trayectoria en espiral. Así como los planetas se mueven en órbitas casi circulares alrededor del Sol, una porción de gas en un disco de acreción también se mueve en una órbita casi circular.

Igualando la gravedad a la fuerza centrífuga, podemos encontrar fácilmente que la velocidad angular a una distancia r está dada por

$$\Omega = \left(\frac{GM}{r^3} \right)^{1/2}$$

Llegados a este punto, es interesante hacerle ver al alumnado que las velocidades angulares de los planetas alrededor del sol varían como $r^{-3/2}$, lo que lleva a la tercera ley del movimiento planetario de Kepler. Por lo tanto, un movimiento circular que satisface esto a menudo se denomina movimiento kepleriano.

Si no hubiera viscosidad en el disco de acreción, entonces el gas podría moverse eternamente en órbitas keplerianas, al igual que los planetas lo harían alrededor del sol. Sin embargo, la fricción de origen viscoso entre capas adyacentes de gas que se mueven con diferentes velocidades angulares hace que el material se vaya trasladando en espiral hacia adentro de forma continua en las regiones internas del disco. A medida que el material gira en espiral hacia adentro en el disco de acreción, pierde energía potencial gravitatoria, esta energía se irradia fuera del disco.

Esta visión simplista del proceso es una buena forma de comenzar para que el alumnado comprenda qué es el proceso de acreción, por qué libera energía y cómo se relaciona tanto con las binarias como con los discos de acreción.

Si el material acumulado cae sobre un objeto compacto de masa M y radio R , entonces una cantidad determinada de unidad de masa de gas pierde energía $-GM/R$ al caer sobre ese objeto y esta energía se irradia. Si $\dot{M}$ es la tasa de acumulación de masa, entonces esperamos que la luminosidad resultante sea

$$L = \frac{GM\dot{M}}{R}.$$

La tasa de acreción $\dot{M}$ determina cómo de luminosa es la fuente. Si es demasiado alta y la fuente es demasiado luminosa, entonces la fuerza hacia afuera sobre la materia debido a la presión de radiación puede ser mayor que la espiral hacia adentro debido a la gravedad.

Como vimos en la sección 6.5, la luminosidad no puede exceder la luminosidad de Eddington. De lo contrario, la materia será expulsada reduciendo la tasa de acreción hasta que la tasa de acreción se ajuste a un valor tal que la luminosidad no exceda la luminosidad de Eddington.

Por lo tanto, y esto se puede dejar como un ejercicio para el alumnado, se puede colegir que la luminosidad de los objetos más brillantes que se acumulan esté cerca de la luminosidad de Eddington, y podemos calcular la luminosidad.

La dispersión de Thomson es la principal fuente de opacidad en la materia acumulada. Usando la expresión para la opacidad debida a la dispersión de Thomson, encontramos la luminosidad de Eddington de la siguiente manera:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi c G M m_{\text{H}}}{\sigma_{\text{T}}} = 1,3 \times 10^{31} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ W},$$

Con esta expresión para la luminosidad y la que hemos visto antes, el alumnado puede deducir fácilmente que la tasa de acreción está dada por

$$\dot{M} = 1,5 \times 10^{-8} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$$

eligiendo, por ejemplo, $M = M_{\odot}$ y $R = 10$ km. Esta es la tasa de acumulación típica en los sistemas binarios. Supongamos que la luminosidad se emita térmicamente desde la superficie de la estrella de neutrones donde cae el material acumulado. La temperatura T de esta región se puede encontrar a partir de

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Si tomamos $L = 10^{31}$ W y $R = 10$ km, se encuentra que la temperatura es de aproximadamente 2×10^7 K. La radiación de cuerpo negro a esta temperatura alcanza su punto máximo en la parte de rayos X del espectro.

La masa de una estrella se puede determinar si está en un sistema binario. Se han determinado las masas de muchas estrellas de neutrones en fuentes binarias de rayos X y púlsares binarios. Todas las masas están presumiblemente por debajo del límite de masa superior de las estrellas de neutrones (que no se conoce con precisión). Sin embargo, hay algunas fuentes binarias de rayos X con acreción que posiblemente tengan masas superiores a $3 M_{\odot}$.

El sistema mejor estudiado de estos objetos es Cygnus X-1, una fuente galáctica de rayos X en la constelación de Cygnus. Esta fue la primera fuente de este tipo aceptada como un agujero negro. El sistema fue descubierto en 1964 durante el vuelo de un cohete y es una de las fuentes de rayos X más potentes detectables desde la Tierra, produciendo una densidad máxima de flujo de rayos X de $2,3 \times 10^{-23} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$. Se estima que el objeto compacto tiene una masa de aproximadamente 21,2 veces la masa del sol y se ha demos-

trado que es demasiado pequeño para ser cualquier tipo conocido de estrella normal u otro objeto que no sea un agujero negro. Si aceptamos este hecho, el radio de su horizonte de eventos tiene 300 km.

Cygnus X-1 pertenece a un sistema binario de rayos X de gran masa a unos 2,22 kiloparsecs del sol, que incluye una estrella variable supergigante azul denominada HDE 226868 que orbita a unas 0,2 AU. Un viento estelar de la estrella proporciona material para un disco de acreción alrededor de la fuente de rayos X. La materia en el disco interno se calienta a millones de grados, generando los rayos X observados. Un par de chorros, dispuestos perpendicularmente al disco, transportan parte de la energía del material que cae hacia el espacio interestelar.

Cygnus X-1 fue objeto de una apuesta entre los físicos Stephen Hawking y Kip Thorne, en la que Hawking apostó en contra de la existencia de agujeros negros en la región. Hawking luego describió esto como una especie de póliza de seguros. En su libro "Breve historia del tiempo" escribió:

"Esta fue una forma de póliza de seguros para mí. He trabajado mucho en los agujeros negros, y sería un desperdicio si resultara que los agujeros negros no existen. Pero en ese caso, tendría el consuelo de ganar mi apuesta, que me daría cuatro años de la revista Private Eye. Si existen agujeros negros, Kip obtendrá un año de Penthouse. Cuando hicimos la apuesta en 1975, estábamos seguros en un 80 % de que Cygnus X-1 era un agujero negro. A estas alturas (1988), diría que estamos seguros en un 95 %, pero la apuesta aún no se ha resuelto."

Según la edición actualizada del décimo aniversario del libro, Hawking pagó la apuesta debido a los datos de observaciones posteriores a favor de los agujeros negros. En su propio libro, "Black Holes and Time Warps", Thorne informa de que Hawking concedió la apuesta irrumpiendo en su oficina mientras Thorne estaba en Rusia, encontrando la apuesta enmarcada y firmada a su vuelta.

Discos de acreción

Una vez que hemos presentado a los estudiantes los procesos básicos de acreción y el mecanismo básico de los discos de acreción, podemos proceder a profundizar sobre el segundo punto. En esta sección describiremos de forma muy esquemática los conceptos más relevantes de este tema. Como siempre, dependiendo del tiempo disponible y cuánto se haya cubierto de los temas anteriores, se le dará al alumnado la posibilidad de profundizar más en uno u otro concepto.

Un tipo de acreción muy importante es la acreción de partículas en un objeto masivo mediante la atracción gravitatoria de más materia, normalmente gaseosa, en un disco de

acreción. La mayoría de los objetos astronómicos, como galaxias, estrellas y planetas, se forman mediante procesos de acreción.

En el caso de un objeto compacto, la estructura que forma el material al caer sobre este puede ser episódicamente de disco, aunque no necesariamente siempre. En estas circunstancias designamos esa estructura un "disco de acreción". Más específicamente, un disco de acreción es una estructura (a menudo un disco circunestelar) formada por material difuso en movimiento orbital alrededor de un cuerpo central masivo. El cuerpo central en nuestro caso es el objeto compacto, pero puede ser, por ejemplo, una estrella.

La fricción, la irradiación desigual, los efectos magnetohidrodinámicos y otras fuerzas inducen inestabilidades que hacen que el material en órbita en el disco entre en espiral hacia el cuerpo central. Las fuerzas gravitacionales y de fricción comprimen y elevan la temperatura del material, provocando la emisión de radiación electromagnética. La gama de frecuencias de esa radiación depende de la masa del objeto central. Los discos de acreción de las estrellas jóvenes y las protoestrellas irradian en el infrarrojo; los que rodean a las estrellas de neutrones y los agujeros negros, en la parte del espectro correspondiente a los rayos X. El estudio de los modos de oscilación de los discos de acreción se denomina discosismología.

Los discos de acreción son un fenómeno omnipresente en la astrofísica; los núcleos galácticos activos, los discos protoplanetarios y los estallidos de rayos gamma implican la existencia de discos de acreción. Estos discos suelen dar lugar a chorros astrofísicos procedentes de las proximidades del objeto central. Los chorros son una forma eficaz de que el sistema estrella-disco se desprenda del momento angular sin perder demasiada masa.

Los discos de acreción más espectaculares que se encuentran en la naturaleza son los de los núcleos galácticos activos y los cuásares, que se cree que son agujeros negros masivos en el centro de las galaxias, como hemos mencionado. Cuando la materia entra en el disco de acreción, sigue una trayectoria que describe una espiral hacia dentro. Esto se debe a que las partículas rozan y rebotan entre sí en un flujo turbulento, lo que provoca un calentamiento por fricción que irradia energía, reduciendo el momento angular de las partículas. Esto permite que la partícula se desvíe hacia el interior, impulsando la espiral hacia adentro.

La pérdida de momento angular se manifiesta como una reducción de la velocidad; a menor velocidad, la partícula debe adoptar una órbita más baja. A medida que la partícula cae en esta órbita inferior, una parte de su energía potencial gravitatoria se convierte en un aumento de la velocidad y la partícula gana velocidad. Por lo tanto, la partícula ha perdido energía aunque ahora se mueve más rápido que antes; sin embargo, ha perdido momento angular. A medida que una partícula orbita cada vez más cerca, su velocidad aumenta, a medida que la velocidad aumenta el calentamiento por fricción, ya que cada vez se irradia más energía potencial de la partícula (en relación con el agujero negro); el disco de acreción

de un agujero negro está lo suficientemente caliente como para emitir rayos X justo fuera del horizonte de sucesos.

Se cree que la gran luminosidad de los cuásares es el resultado de la acreción de gas por parte de los agujeros negros supermasivos. Los discos de acreción elípticos que se forman en la disrupción de marea de las estrellas pueden ser típicos en los núcleos galácticos y en los cuásares. El proceso de acreción puede convertir entre el 10 y el 40 por ciento de la masa de un objeto en energía, en comparación con el 0,7 por ciento de los procesos de fusión nuclear. En los sistemas binarios cercanos, el componente primario más masivo evoluciona más rápido y ya se ha convertido en una enana blanca, una estrella de neutrones o un agujero negro, cuando el compañero menos masivo alcanza el estado gigante y supera su lóbulo de Roche. Entonces se produce un flujo de gas desde la estrella compañera hacia la primaria. La conservación del momento angular impide un flujo recto de una estrella a la otra y en su lugar se forma un disco de acreción.

Estabilidad de Rayleigh

En 1940 se empezaron a derivar modelos a partir de principios físicos básicos para comprender la física de acreción. Para que coincidieran con las observaciones, esos modelos tenían que invocar un mecanismo aún desconocido de redistribución del momento angular. Para que la materia caiga hacia el interior debe perder no sólo energía gravitatoria sino también momento angular. Como el momento angular total del disco se conserva, la pérdida de momento angular de la masa que cae hacia el centro tiene que ser compensada por una ganancia de momento angular de la masa alejada del centro. En otras palabras, el momento angular debe ser transportado hacia el exterior para que la materia se acreciente. Según el criterio de estabilidad de Rayleigh,

$$\frac{\partial(R^2\Omega)}{\partial R} > 0, \quad (6.28)$$

donde Ω es la velocidad angular de un elemento del fluido y R su distancia al centro de rotación, se espera que un disco de acreción sea un flujo laminar. Es decir, las partículas de fluido siguen trayectorias suaves en capas, con cada capa moviéndose suavemente más allá de las capas adyacentes con poca o ninguna mezcla.

A bajas velocidades, el sistema tiende a fluir sin mezclarse lateralmente, las capas adyacentes se deslizan unas junto a otras, individualmente. No hay corrientes cruzadas perpendiculares a la dirección del flujo, ni remolinos de fluidos. En el flujo laminar, el movimiento de las partículas es muy ordenado, de forma que las partículas cercanas a una superficie sólida se mueven en líneas rectas paralelas a esa superficie. El flujo laminar es un régimen de flujo caracterizado por difusión de alto momento y convección de bajo momento.

Esto impide la existencia de un mecanismo hidrodinámico para el transporte del momento angular.

Por un lado, así como se planteó en la época, estaba claro que las tensiones viscosas acabarían provocando que la materia hacia el centro se calentara e irradiara parte de su energía gravitatoria. Por otro lado, la viscosidad por sí misma no era suficiente para explicar el transporte del momento angular a las partes exteriores del disco. La viscosidad potenciada por la turbulencia era el mecanismo que se consideraba responsable de dicha redistribución del momento angular, aunque el origen de la turbulencia en sí no se comprendía bien. En 1991, con el redescubrimiento de la inestabilidad magnetorotacional (MRI), se descubrió que un disco débilmente magnetizado que se acumula alrededor de un objeto central masivo y compacto sería altamente inestable, proporcionando un mecanismo directo para la redistribución del momento angular.

Modelo de Shakura y Sunyaev

Shakura y Sunyaev (1973) propusieron la turbulencia en el gas como fuente de un aumento de la viscosidad. Suponiendo una turbulencia subsónica y la altura del disco como límite superior del tamaño de los remolinos, la viscosidad del disco puede estimarse como

$$\nu = \alpha c_s H, \quad (6.28)$$

donde c_s es la velocidad del sonido, H es la altura de la escala del disco, y α es un parámetro libre entre cero (cuando no hay acreción) y aproximadamente uno. En un medio turbulento $\nu \approx \nu_{\text{turb}}$. En esta relación ν_{turb} es la velocidad en cada una de las células en las que dividimos el espacio de fases para estudiar la turbulencia en relación con el movimiento medio del gas, y l_{turb} es el tamaño de las células turbulentas más grandes, que se estima como $l_{\text{turb}} \approx H = c_s/\Omega$ y $\nu_{\text{turb}} \approx c_s$. Por otra parte, $\Omega = (GM)^{1/2} r^{-3/2}$ es la velocidad angular orbital kepleriana, y r es la distancia radial desde el objeto central de masa M .

Utilizando la ecuación de equilibrio hidrostático, combinada con la conservación del momento angular y asumiendo que el disco es delgado, las ecuaciones de la estructura del disco pueden resolverse en términos del parámetro α . Muchos de los observables dependen sólo débilmente de él, por lo que esta teoría es predictiva aunque tenga un parámetro libre.

$$\begin{aligned} H &= 1,7 \times 10^8 \alpha^{-1/10} \dot{M}_{16}^{3/20} m_1^{-3/8} R_{10}^{9/8} f^{3/5} \text{ cm} \\ T_c &= 1,4 \times 10^4 \alpha^{-1/5} \dot{M}_{16}^{3/10} m_1^{1/4} R_{10}^{-3/4} f^{6/5} \text{ K} \\ \rho &= 3,1 \times 10^{-8} \alpha^{-7/10} \dot{M}_{16}^{11/20} m_1^{5/8} R_{10}^{-15/8} f^{11/5} \text{ g cm}^{-3} \end{aligned}$$

donde T_c y ρ son la temperatura y la densidad del plano medio, respectivamente. Por otra parte, $\dot{M}_{16}$ es la tasa de acreción, en unidades de 10^{16} g s^{-1} , m_1 es la masa del objeto central de acreción en unidades de masa solar, R_{10} es el radio de un punto del disco, en unidades

de 10^{10} cm y

$$f = \left[1 - (R_*/R)^{1/2} \right]^{1/4}$$

es el radio a partir del que el momento angular deja de ser transportado hacia el interior.

El modelo de disco α de Shakura-Sunyaev es inestable tanto térmica como viscosamente. Un modelo alternativo, conocido como el β , estable en ambos sentidos, supone que la viscosidad es proporcional a la presión del gas, $\nu \propto \alpha p_{\text{gas}}$. En el modelo estándar de Shakura-Sunyaev, se supone que la viscosidad es proporcional a la presión total $p_{\text{tot}} = p_{\text{rad}} + p_{\text{gas}} = \rho c_s^2$.

El modelo Shakura-Sunyaev supone que el disco está en equilibrio térmico local y puede irradiar su calor de forma eficiente. En este caso, el disco irradia el calor viscoso, se enfría y se vuelve geoméricamente delgado. Sin embargo, esta suposición puede dejar de ser válida, como comentábamos antes.

En el caso de ineficiencia radial, el disco puede hincharse y convertirse en un toroide o en alguna otra solución tridimensional como un flujo de acreción dominado por la advección (ADAF). Las soluciones ADAF suelen requerir que la tasa de acreción sea inferior a unos pocos porcentajes del límite de Eddington. Otro extremo es el caso de los anillos de Saturno, ya que el disco es tan pobre en gas que su transporte de momento angular está dominado por colisiones de cuerpos sólidos e interacciones gravitacionales disco-luna. El modelo concuerda con las recientes mediciones astrofísicas que utilizan lentes gravitacionales.

Inestabilidad magnetorotacional

Balbus y Hawley (1991) propusieron un mecanismo que implica campos magnéticos para generar el transporte de momento angular. Un sistema sencillo que muestra este mecanismo es un disco de gas en presencia de un campo magnético axial débil. Dos elementos fluidos radialmente vecinos se comportarán como dos puntos de masa conectados por un resorte sin masa, la tensión del resorte hace las veces de la tensión magnética.

En un disco kepleriano, el elemento de fluido interior orbita más rápidamente que el exterior, lo que hace que el muelle se estire. El elemento de fluido interior se ve entonces forzado por el muelle a reducir su velocidad, reduciendo en consecuencia su momento angular y haciendo que se desplace a una órbita más baja. El elemento de fluido exterior, al ser arrastrado hacia delante, se acelerará, aumentando su momento angular y se desplazará a una órbita de mayor radio. La tensión del muelle aumentará a medida que los dos elementos de fluido se separen más y el proceso se agote.

Se puede demostrar que en presencia de dicha tensión de muelle el criterio de estabilidad de Rayleigh se sustituye por

$$\frac{d\Omega^2}{d \ln R} > 0. \quad (6.25)$$

Lo interesante es la mayoría de los discos astrofísicos no cumplen este criterio y, por lo tanto, son propensos a esta inestabilidad magnetorrotatoria. Se cree que los campos magnéticos presentes en los objetos astrofísicos (necesarios para que se produzca la inestabilidad) se generan mediante la acción de la dinamo.

Campos magnéticos y chorros

Normalmente se supone que los discos de acreción están cubiertos por los campos magnéticos externos presentes en el medio interestelar. Estos campos son típicamente débiles (unos pocos micro-Gauss), pero sin embargo pueden anclarse a la materia del disco debido a la alta conductividad eléctrica del mismo y, además, ser transportados hacia el interior de la estrella central. Este proceso puede concentrar el flujo magnético alrededor del centro del disco dando lugar a campos magnéticos muy fuertes. La formación de potentes chorros astrofísicos a lo largo del eje de rotación de los discos de acreción requiere un campo magnético poloidal a gran escala en las regiones interiores del disco.

Estos campos magnéticos pueden ser generados de forma alternativa por una dinamo magnética dentro del disco. Para que el mecanismo magneto-centrífugo pueda lanzar potentes chorros, parece necesario que los campos magnéticos tengan una intensidad de al menos 100 Gauss.

Sin embargo, hay problemas para llevar el flujo magnético externo hacia el interior del objeto central del disco: La alta conductividad eléctrica dicta que el campo magnético se congele en la materia que se está acumulando en el objeto central con una velocidad lenta. Sin embargo, el plasma no es un conductor eléctrico perfecto, por lo que siempre hay cierto grado de disipación. Por lo tanto, nos vemos con el problema de que el campo magnético se difunde más rápido que la velocidad a la que es arrastrado hacia el interior por la acreción de materia.

Una solución sencilla es suponer una viscosidad mucho mayor que la difusividad magnética en el disco. Sin embargo, las simulaciones numéricas, y los modelos teóricos, muestran que la viscosidad y la difusividad magnética tienen casi el mismo orden de magnitud en los discos magneto-rotacionales turbulentos.

Sin embargo, hay otros factores a tomar en cuenta que pueden afectar la tasa de advección y difusión:

- la reducción de la difusión magnética turbulenta en las capas superficiales,
- la reducción de la viscosidad Shakura-Sunyaev por los campos magnéticos
- y la generación de campos a gran escala por la turbulencia MHD a pequeña escala -una dinamo a gran escala.

Este continúa siendo un problema sin clara solución. Podría ser, por ejemplo, que combinación de diferentes mecanismos fuese responsable de transportar eficazmente el campo externo hacia el interior de las partes centrales del disco donde se lanza el chorro. La flotabilidad magnética, el bombeo turbulento y el diamagnetismo turbulento son ejemplos de estos fenómenos físicos para explicar dicha concentración eficiente de campos externos.

Modelos analíticos de discos de acreción

Cuando la tasa de acreción es por debajo de la de Eddington y la opacidad es muy alta, se forma lo que denominamos un disco de acreción delgado estándar. Este disco es geoméricamente delgado en la dirección vertical, y está formado por un gas relativamente frío, con una presión de radiación despreciable.

El gas desciende en espirales muy cerradas, parecidas a órbitas casi circulares y libres (keplerianas). Los discos delgados son relativamente luminosos y tienen espectros electromagnéticos térmicos, es decir, no muy diferentes a los de una suma de cuerpos negros. En la figura 6.21 mostramos una de las primeras (si no la primera) imágenes que reproduce uno de estos discos.

El enfriamiento radiativo es muy eficiente en estos discos. El trabajo clásico de 1974 de Shakura y Sunyaev sobre los discos de acreción delgados es uno de los artículos más citados de la astrofísica moderna. Los discos delgados fueron elaborados de forma independiente por Lynden-Bell, Pringle y Rees. Pringle contribuyó en los últimos treinta años a muchos resultados clave para la teoría de los discos de acreción, y escribió la clásica revisión de 1981 que durante muchos años fue la principal fuente de información sobre los discos de acreción, y que sigue siendo muy útil hoy en día.

Page y Thorne describieron un tratamiento relativista completamente general, como el que se necesita para la parte interior del disco cuando el objeto central es un agujero negro. Éste se utilizó para producir imágenes similares a las de Luminet, como podemos ver en la figura 6.22. Es interesante explicarle al alumnado que, aunque tal sistema es intrínsecamente simétrico, su imagen no lo es. La razón radica en que la velocidad de rotación relativista es muy elevada para el equilibrio centrífugo en el campo gravitatorio cercano al agujero negro. Por lo tanto, se produce un desplazamiento al rojo muy fuerte en el lado que se aleja del observado, y al azul por la parte del lado que se acerca. Debido a la curvatura de la luz por la gravedad, el disco aparece distorsionado, pero no oculto por el agujero negro.

En este punto del programa sería interesante explicarle al alumnado alguno de los cálculos hechos por Kip Thorne para producir este tipo de imágenes, basándonos en su libro "The Science of Interstellar" que añado a la lista de lectura recomendada.

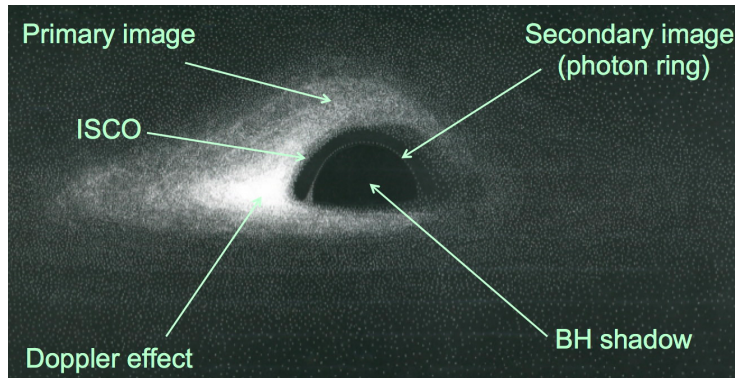


Figura 6.21: La imagen “fotográfica” final en blanco y negro de un disco de acreción fino alrededor de un agujero negro. Esta figura se obtuvo a partir de los complejos cálculos de [35], con los que el autor calcula los isofotos (líneas aparentes de igual luminosidad para un observador externo). Sin embargo, al carecer en ese momento de un software de dibujo adecuado, el autor tuvo que crearla a mano. A partir de los datos numéricos del ordenador, dibujó directamente sobre el papel Canson negativo con tinta china negra, colocando puntos más densos allí donde la simulación mostraba más luz. A continuación, tomó el negativo del negativo para obtener el positivo, convirtiendo los puntos negros en blancos y el fondo blanco en negro. El resultado fue la forma asimétrica de esta gráfica en la que se han añadido etiquetas para identificar más fácilmente los diferentes elementos del agujero negro.

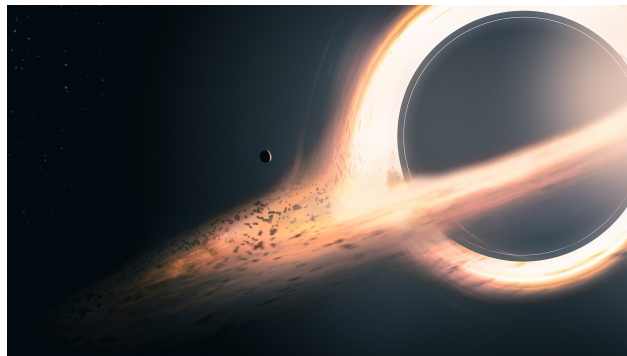


Figura 6.22: “Gargantua”, el agujero negro de la película *Interstellar*, créditos de Paramount Pictures, 2014. Para crear esta imagen, un agujero negro supermasivo en rotación, un equipo de 30 personas de Double Negative con la ayuda de Kip Thorne, tradujo las páginas de ecuaciones teóricas a los ingenieros. El equipo luego escribió un nuevo software de renderizado CGI basado en estas ecuaciones para crear simulaciones precisas de las lentes gravitacionales causadas por estos fenómenos. Algunos fotogramas individuales tardaron hasta 100 horas en renderizarse, con un total de 800 terabytes de datos. Si lo comparamos con los resultados de Luminet, en la figura 6.21 veremos que, si bien los detalles resultan más nítidos, la esencia captada hace casi cincuenta años es la misma.

Chorros relativistas

Un chorro relativista es un fenómeno astronómico en el que los flujos de materia ionizada se emiten como un haz extendido a lo largo del eje de rotación. Cuando esta materia muy acelerada en el haz se aproxima a la velocidad de la luz, los chorros astrofísicos se convierten en chorros relativistas al mostrar efectos de la relatividad especial.

La formación y la potencia de los chorros astrofísicos son fenómenos muy complejos que están asociados a muchos tipos de fuentes astronómicas de alta energía, y que requieren de procesos no térmicos. Es probable que surjan de interacciones dinámicas dentro de los discos de acreción, cuyos procesos activos suelen estar relacionados con objetos centrales compactos como agujeros negros, estrellas de neutrones o púlsares. El nexo con los temas tratados previamente sobre objetos compactos es evidente.

Un ejemplo es el púlsar IGR J11014-6103, que tiene el mayor chorro observado hasta ahora en la Vía Láctea, y cuya velocidad se estima en un 80 % de la velocidad de la luz (0,8c). En la figura 6.23 mostramos una observación del mismo.

En la izquierda tenemos un zoom del campo de observación de la EPIC-MOS1 de J11014-6103. En este caso los autores han mantenido los colores y eliminamos la cuadrícula de coordenadas y los círculos de error alrededor de las fuentes detectadas para mayor claridad.

En la derecha de la misma figura mostramos un zoom del campo del XRT (*Swift's X-Ray Telescope*). En esta figura marcamos la fuente detectada con Swift (incertidumbre de 4,4.^{al} 90 %), y las fuentes N y S detectadas con XMM-Newton (incertidumbre de 2.^{al} 90 %). Los contornos determinados a partir de las observaciones de XMM-Newton también están sobretrazados (en verde), junto con el círculo de error que representa la posición INTEGRAL de IGR J11014-6103 (en rojo) y el círculo de error de la fuente Einstein 2E 2383 (en azul, incertidumbre de 39.^{al} 90 %).

Se han obtenido observaciones de rayos X, pero no se ha detectado ninguna evidencia de radio ni disco de acreción. Inicialmente, se presumía que este púlsar giraba rápidamente, pero mediciones posteriores indican que la velocidad de giro es de sólo 15,9 Hz. Una velocidad de giro tan lenta y la falta de material de acreción sugieren que el chorro no está impulsado por la rotación ni por la acreción, aunque parece alineado con el eje de rotación del púlsar y perpendicular al movimiento real del púlsar.

Otros objetos astronómicos que contienen chorros son las estrellas variables cataclísmicas, las binarias de rayos X y las erupciones rayos gamma (GRB).

Una de las explicaciones es que los campos magnéticos se distribuyen de tal forma que coliman dos haces diametralmente opuestos lejos de la fuente central por ángulos de unos pocos grados. Los chorros también pueden estar influidos por un efecto de la relatividad general conocido como el causado por el espín al arrastrar al espaciotiempo alrededor del agujero negro.

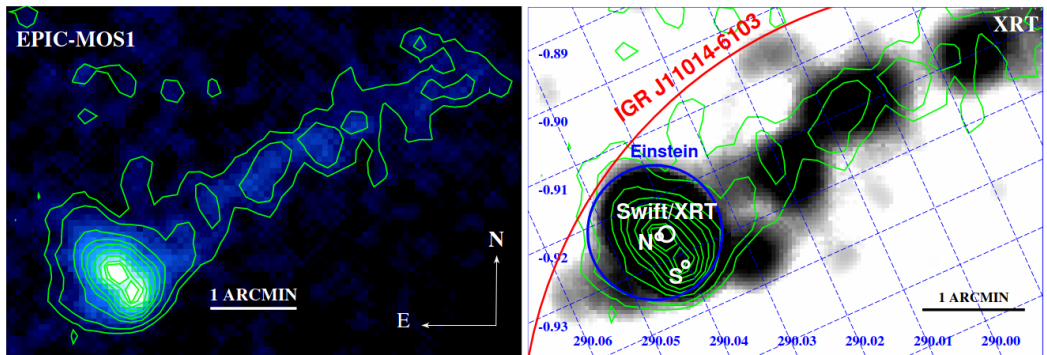


Figura 6.23: Adaptación de la figura (1) de [36]. La escala de intensidad es logarítmica y la cuadrícula está en coordenadas galácticas.

La mayoría de los chorros más grandes y activos son creados por agujeros negros supermasivos. Estos chorros pueden superar los millones de parsecs de longitud. Es muy importante hacerle ver al alumnado cómo un objeto minúsculo desde el punto de vista de la galaxia, un agujero negro, que tiene un tamaño de aproximadamente diez órdenes de magnitud menor que la galaxia, puede producir un objeto que se extiende mucho más allá del tamaño de esta.

Para ser más concretos, un chorro relativista es un haz de materia ionizada acelerada a una velocidad cercana a la de la luz. Las velocidades de los chorros al acercarse a la velocidad de la luz muestran efectos significativos de la teoría especial de la relatividad; por ejemplo, haces relativistas que cambian el brillo aparente del haz.

Los agujeros negros centrales masivos de las galaxias tienen los chorros más potentes, pero su estructura y comportamientos son similares a los de las estrellas de neutrones y agujeros negros galácticos más pequeños. Estos sistemas se denominan a menudo microcuásares y muestran un amplio rango de velocidades. El chorro del SS 433, por ejemplo, tiene una velocidad media de 0,26c.

Los mecanismos detrás de la composición de los chorros siguen siendo inciertos, aunque algunos estudios favorecen los modelos en los que los chorros están compuestos por una mezcla eléctricamente neutra de núcleos, electrones y positrones, mientras que otros son consistentes con chorros compuestos por plasma de positrones-electrones.

Debido a la enorme cantidad de energía necesaria para lanzar un chorro relativista, es posible que algunos chorros sean impulsados por agujeros negros giratorios. Sin embargo, la frecuencia de fuentes astrofísicas de alta energía con chorros sugiere combinaciones de diferentes mecanismos identificados indirectamente con la energía dentro del disco de acreción asociado y las emisiones de rayos X de la fuente generadora. Particularmente, hoy en día hay dos teorías que parecen poder explicar cómo puede transferirse la energía de un agujero negro a un chorro astrofísico.

El proceso de Blandford-Znajek

Esta teoría explica la extracción de energía de los campos magnéticos alrededor de un disco de acreción. La rotación del agujero negro los arrastra y mezcla de forma que se produce un chorro relativista por la disminución del volumen en el que las líneas de campo pueden existir.

La ergosfera desempeña un papel importante en el proceso de Blandford-Znajek. Para extraer energía y momento angular del agujero negro, el campo electromagnético que rodea al agujero debe ser modificado por corrientes magnetosféricas. Para impulsar dichas corrientes, es necesario que el campo eléctrico no sufra del efecto de pantalla y, en consecuencia, el campo de vacío creado dentro de la ergosfera por fuentes lejanas tenga una componente que tampoco sufra de dicho efecto. La forma más favorecida de proporcionar esto es una cascada de pares $e\pm$ en un fuerte campo eléctrico y de radiación. A medida que la ergosfera hace girar la magnetosfera en su interior, el flujo saliente de momento angular da lugar a la extracción de energía del agujero negro.

El proceso Blandford-Znajek requiere un disco de acreción con un fuerte campo magnético poloidal alrededor de un agujero negro que gira. El campo magnético extrae energía del espín, y la potencia puede estimarse como la densidad de energía a la velocidad del cilindro de la luz por el área:

$$P = B^2 \left(\frac{r}{r_s} \right)^4 r_s c = \frac{B^2 r^4 \omega^2}{c} \quad (6.25)$$

donde B es la intensidad del campo magnético, r_s es el radio de Schwarzschild, y ω la velocidad angular.

Mecanismo de Penrose

En este caso la energía se extrae de un agujero negro en rotación mediante el arrastre del espaciotiempo. Se demostró teóricamente que de esta forma se puede extraer la energía y el momento de las partículas relativistas, para formar posteriormente los chorros.

Este proceso teorizado por Roger Penrose como un medio por el cual se puede extraer energía de un agujero negro en rotación. El proceso aprovecha la ergosfera que, como hemos explicado previamente al alumando es una región del espaciotiempo alrededor del agujero negro arrastrada por su rotación más rápido que la velocidad de la luz. Esto significa que desde el punto de un observador externo cualquier materia en su interior es forzada a moverse en la dirección de la rotación del agujero negro.

Las leyes de la física de los agujeros negros de Kerr dicen que, aunque un agujero negro impida la salida de cualquier radiación o materia, puede ceder una parte de su energía de rotación al medio exterior.

El papel clave lo desempeña la ergosfera, una región situada entre el horizonte de su-

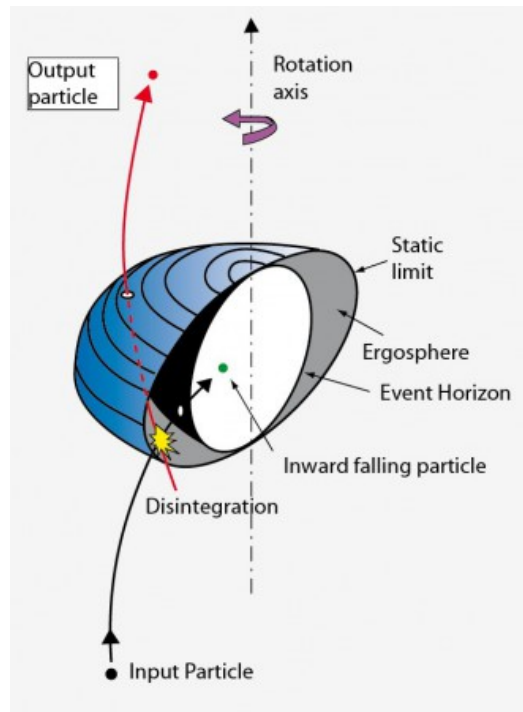


Figura 6.24: Proceso de Penrose. Cuando un proyectil se desintegra en la ergosfera y uno de los fragmentos cae en el agujero negro, el otro fragmento puede salir y ser recuperado, llevando más energía que el proyectil inicial. Esta es una adaptación de la figura 6.9.

cesos y el límite estático por debajo de la cual, como en una vorágine, el propio espacio-tiempo es arrastrado irresistiblemente con él (el llamado efecto Lense-Thirring). Roger Penrose sugirió en 1969 que si un proyectil se desintegra en la ergosfera, uno de los fragmentos cae en el horizonte de sucesos en dirección opuesta a la rotación del agujero negro, mientras que el otro fragmento puede salir y ser recuperado, llevando más energía que el proyectil inicial.

En el proceso, un cuerpo cae en la ergosfera. En su punto más bajo el cuerpo dispara un propulsor hacia atrás; sin embargo, para un observador lejano ambos parecen seguir avanzando debido al arrastre de fotogramas (aunque a diferentes velocidades). El propulsor, al ser frenado, cae hacia el horizonte de sucesos del agujero negro (disco negro). Y los restos del cuerpo, al ser acelerados, salen volando (línea negra fina) con un exceso de energía que compensa con creces la pérdida del propulsor y la energía utilizada para dispararlo.

La superficie exterior de la ergosfera es la superficie en la que la luz que se mueve en dirección opuesta a la rotación del agujero negro permanece en una coordenada angular fija, según un observador externo. Dado que las partículas masivas viajan necesariamente más lento que la luz, las partículas masivas se moverán necesariamente junto con la rotación

del agujero negro. El límite interior de la ergosfera es el horizonte de sucesos, el perímetro espacial más allá del cual la luz no puede escapar.

Dentro de la ergosfera, ni siquiera la luz puede seguir el ritmo de la rotación del agujero negro, ya que las trayectorias de los objetos estacionarios (desde la perspectiva exterior) se vuelven espaciales, en lugar de temporales (que tendría la materia normal), o luminosas. Matemáticamente, la componente dt^2 de la métrica cambia de signo dentro de la ergosfera. Eso permite que la materia tenga energía negativa dentro de la ergosfera siempre que se mueva en contra de la rotación del agujero negro lo suficientemente rápido (o, desde la perspectiva exterior, que se resista a ser arrastrada en un grado suficiente). El mecanismo de Penrose explota eso sumergiéndose en la ergosfera, arrojando un objeto que recibió energía negativa, y regresando con más energía que antes.

Gracias a esto, se puede extraer energía de rotación del agujero negro, lo que hace que éste se reduzca a una velocidad de rotación menor. La cantidad máxima de energía (por masa del objeto lanzado) se extrae si el agujero negro gira a la velocidad máxima, el objeto sólo roza el horizonte de sucesos y decae en cuantos de luz que se mueven hacia delante y hacia atrás (el primero escapa del agujero negro, el segundo cae dentro).

La máxima ganancia de energía posible para una sola partícula mediante este proceso es del 20,7 % de su masa en el caso de un agujero negro sin carga (suponiendo el mejor caso de rotación máxima del agujero negro). La energía, como hemos explicado, se toma de la rotación del agujero negro, por lo que hay un límite en la cantidad de energía que se puede extraer mediante el proceso de Penrose y estrategias similares.

Ejercicios de acreción

Ejercicio 1

Un núcleo galáctico activo (AGN) de tipo 1 (es decir, que muestra líneas en el espectro óptico/UV) se controla espectroscópicamente durante unos tres años. El espectro promedio alrededor de la línea $H\beta$ se muestra a la izquierda en la figura 6.25 (se han eliminado el continuo y otras líneas). El panel derecho muestra la evolución temporal del espectro a una longitud de onda dominado por continuo y del flujo integrado $H\beta$.

Calcule la masa del agujero negro supermasivo responsable de la emisión, comentando la hipótesis adoptada. ¿La masa estimada depende del desplazamiento al rojo del núcleo? Suponiendo que la longitud de onda del $H\beta$ en el laboratorio es de 4861 angstrom, evalúe la resolución angular necesaria para resolver espacialmente la línea ancha región (es decir, la región responsable de la región de línea ancha).

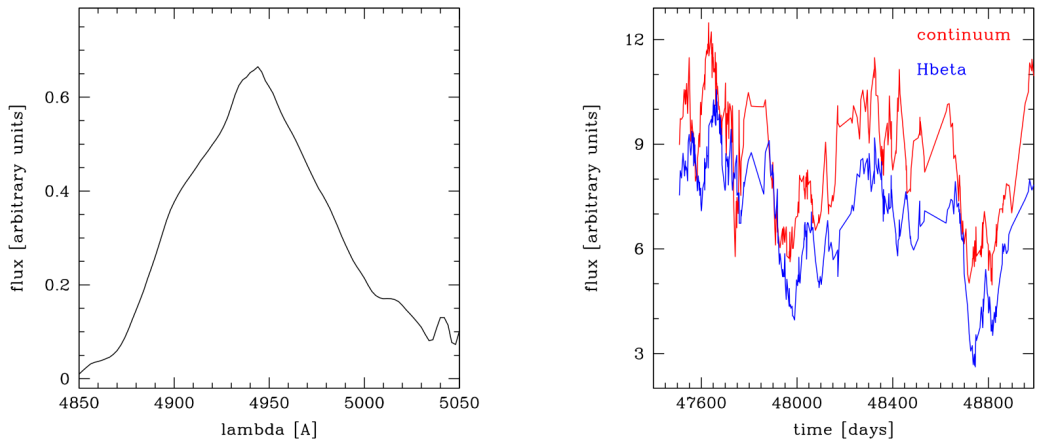


Figura 6.25: Flujo en función de λ y tiempo para un núcleo galáctico activo de tipo 1.

Ejercicio 2

Una estrella de masa $30M_{\odot}$ suministra gas al agujero negro al que está vinculado con una tasa de $\dot{M} = 10 - 8M_{\odot}$. En el momento $t = 0$ la masa del agujero negro es de $10 M_{\odot}$. Calcule si el proceso de crecimiento puede exceder el límite de Eddington y estime la masa máxima que puede alcanzar el agujero negro.

Ejercicio 3

Un agujero negro con una masa inicial de $10 M_{\odot}$ elimina por fuerzas de mareas mente $3 \times 10^{-7} M_{\odot}/\text{yr}$ de gas de la estrella compañera. El gas cae hacia el agujero negro, lo que resulta en un proceso de acreción caracterizado por una eficiencia radiativa de 0,1. Calcule: (A) ¿Cuál es la tasa efectiva en crecimiento inicial del agujero negro si el proceso de acreción es limitado la presión de radiación asociada? (B) Suponiendo que el proceso dura lo suficiente, ¿tras cuánto tiempo el crecimiento ya no excede el límite de Eddington?

Ejercicio 4

Una enana blanca de masa 1 masa solar y un radio de 5000 km aumenta la materia de una estrella compañera. El brillo del proceso. su luminosidad de Eddington es 0,01. Asumiendo que la tasa de crecimiento permanece constante, calcule cuánto tiempo pasa para que la enana blanca alcance la masa de Chandrasekhar.

Ejercicio 5

Un agujero negro supermasivo de masa $10^8 M_{\odot}$ acreta gas emitiendo una luminosidad $L_{\text{acc}} = 0,5 L_{\text{Edd}}$. Suponiendo que la luminosidad es emitida isotrópicamente, estime la velocidad del gas (suponiendo que tiene simetría esférica y que es ópticamente delgada) ligado al agujero negro para poder estar en equilibrio. ¿Qué masa estimaría un astrónomo a través de un mapa de reverberación?

Ejercicio 6

Estime: (i) la eficiencia radiativa de un proceso de acreción de gas en el planeta Mercurio (radio 2500 km, masa 3×10^{23} kg); (ii) el tiempo en que el planeta duplica su masa, suponiendo una luminosidad asociada con el proceso de acreción igual a la del sol y suponiendo que el planeta durante el proceso no cambia su compacidad.

Ejercicio 7

Un satélite esférico con radio $r = 0,7$ metros está estacionario con respecto a un objeto compacto de masa M a una distancia d . El objeto compacto crece hasta su límite de Eddington. Calcule la masa m del satélite para que este se encuentre en equilibrio a la distancia r , demostrando que tal la masa no depende ni de la masa M del objeto compacto ni de la distancia d .

Ejercicio 8

Los discos de acreción alrededor de objetos compactos, como las estrellas de neutrones, suelen ser fuentes potentes de rayos X. Suponiendo que los discos de acreción radian como cuerpos negros, ¿cuál es la temperatura aproximada requerida para que el pico de radiación llegue a la banda de rayos X del espectro? ¿Qué tipo de error estamos cometiendo al aproximarlos por un cuerpo negro?

6.6. Bibliografía básica

1. David J. Griffiths, David Derbes y Richard B. Sohn (editores), "Sidney Coleman's Lectures on Relativity", Cambridge University Press, 2022
2. Yakov B. Zel'dovich e Igor D. Novikov, "Stars and Relativity", 2011, Dover Publications
3. Shapiro, Stuart L.; Teukolsky, Saul A., "Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects", Wiley VCH, 1983

4. S. M. Carroll, "Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity", Addison-Wesley, 2004.
5. R. M. Wald, "General Relativity", Chicago University Press, 1984
6. P.K. Townsend, "Black Holes", arXiv, 1997. Notas que acompañaron un curso en relatividad y agujeros negros, *Part III of the Cambridge University Mathematical Tripos*. Los problemas de la parte correspondiente a estos dos temas que he incluido en la memoria corresponden en casi su práctica totalidad a los que se encuentran en este manuscrito.
7. C. Hirata, notas disponibles en su página <https://hirata10.github.io/> sobre el curso de relatividad general.
8. Hessels, Jason W. T; Ransom, Scott M; Stairs, Ingrid H; Freire, Paulo C. C; Kaspi, Victoria M; Camilo, Fernando (2003). "Neutron Stars for Undergraduates". American Journal of Physics. 72 (2004): 892–905. [arXiv:nucl-th/0309041](https://arxiv.org/abs/nucl-th/0309041).
9. Luciano Rezzolla and Olindo Zanotti, "Relativistic Hydrodynamics", Oxford Scholarship, ISBN-13: 9780198528906, 2013
10. "Accretion Power in Astrophysics", Juhan Frank, Andrew King, Derek Raine, Cambridge University Press, 2002
11. Kip Thorne, "The Science of Interstellar", W. W. Norton & Company; Illustrated edition (November 7, 2014)

Parte II

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO

7

AGUJEROS NEGROS SUPERMASIVOS Y ESPIRALES DE ONDAS GRAVITACIONALES

Objetos masivos y oscuros, muy probablemente agujeros negros supermasivos (SMBH), se encuentran en la mayoría de las galaxias. Las estrechas correlaciones observadas entre sus masas y el sistema estelar circundante, indican una enigmática coevolución. ¿Por qué la masa de un objeto, cuyo tamaño típico es de $\sim 10^{-7}$ pársec (pc, para una masa de $10^6 M_{\odot}$) se correlaciona con las propiedades estelares de toda la galaxia, que puede tener un tamaño de unos 10^3 pc? ¿Son estos objetos agujeros negros, como predice la teoría de la relatividad general de Einstein o necesitamos alternativas? La respuesta está en el horizonte de sucesos, la única característica que define a los SMBH. Para sondearlo, tenemos a nuestra disposición las estrellas. En este proyecto, me centraré en el núcleo galáctico (los pocos centímetros centrales de una galaxia) que contiene objetos masivos con masas de hasta $\sim 10^7 M_{\odot}$. La razón es triple:

- (a) Estos núcleos suelen estar dominados por cúmulos estelares nucleares, que son los más masivos, y cúmulos más masivos y densos del universo actual.
- (b) Las perturbaciones de marea de las estrellas sólo son relevantes para este tipo de

SMBHs de menor masa.

- (c) En general, se puede considerar que estos sistemas no han sufrido una fusión importante que posiblemente podría haber destruido el cúmulo nuclear.

Por lo tanto, en estos sistemas, el crecimiento de del objeto oscuro masivo central a través de la acreción estelar es relevante, a diferencia de las fusiones mayores, que suelen dar lugar a una fase de alta acreción de gas. Los cúmulos estelares nucleares que albergan un objeto oscuro masivo con una masa de hasta $10^7 M_{\odot}$ son, por tanto, los bancos de pruebas perfectos para sondear el horizonte de sucesos del SMBH potencial con estrellas. La ventaja es clara: la dinámica estelar alrededor de un objeto masivo es un problema multipartícula relativamente sencillo, y tenemos datos: en nuestra propia galaxia, tenemos observaciones de estrellas y nubes que están en órbitas muy cercanas a nuestro SMBH. En otras galaxias, hemos detectado unos 50 candidatos a perturbaciones de marea estelar, y este número debería aumentar rápidamente con los próximos estudios de transitorios. Con los conjuntos de sincronización de púlsares pronto detectaremos, al menos, el fondo de ondas gravitacionales estocásticas *directamente* de los núcleos. El momento para este estudio es bueno: Podemos realizar observaciones de diferentes formas, tanto con luz como con ondas gravitacionales. Con los datos de estas observaciones multimensajeras podremos abordar la naturaleza de estos objetos masivos y oscuros.

7.1. Objetos supermasivos y oscuros en núcleos galácticos

Uno de los resultados más apasionantes de la astronomía moderna es el descubrimiento, principalmente a través de observaciones de alta resolución de la cinemática de las estrellas y el gas, de que la mayoría de las galaxias brillantes cercanas, si no todas, albergan un objeto oscuro, masivo y compacto en su centro [37, 38, 39], de la que reproducimos su figura en la figura 7.1, y [40]). El caso más espectacular es nuestra propia galaxia, la Vía Láctea. Al seguir e interpretar la dinámica estelar en el centro de nuestra galaxia tenemos las pruebas más sólidas de la existencia de un objeto oscuro masivo, muy probablemente un agujero negro supermasivo (SMBH).

El examen minucioso de las órbitas keplerianas de las llamadas “estrellas S” (también llamadas estrellas S0, donde la letra S significa simplemente fuente) ha revelado la naturaleza del objeto oscuro central situado en el centro galáctico. Siguiendo a una de ellas, S2 (S02), la masa que encierra la órbita, un volumen con un radio no mayor de 6,25 horas-luz, se estimó en unas $3,7 \times 10^6 M_{\odot}$ [41, 42]. Datos más recientes, basados en muchos años de observación, fijan la masa del SMBH central en $4 \times 10^6 M_{\odot}$ [para una revisión ver 43, y referencias en ellas].

Las observaciones de otras galaxias indican que las masas de los SMBH pueden alcanzar algunos miles de millones de masas solares ($M_{\odot}$), se correlacionan con las propiedades

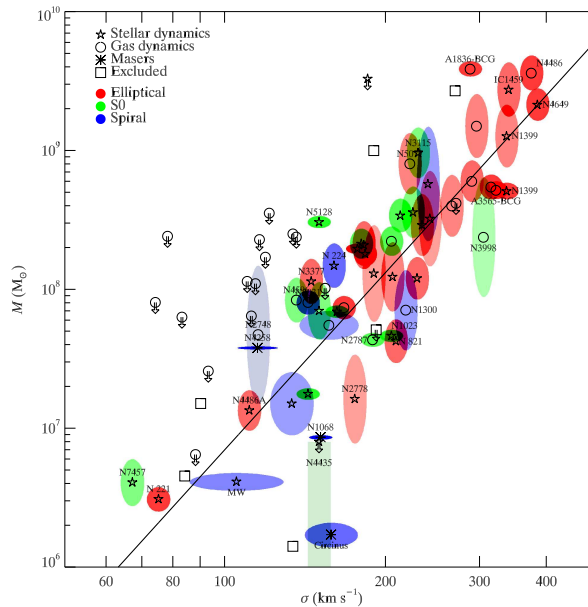


Figura 7.1: Correlación entre la masa de los agujeros negros supermasivos y la dispersión de velocidades estelar de las galaxias que los albergan.

estelares de las galaxias anfitrionas (por ejemplo, la dispersión de la velocidad del bulbo de la galaxia). La existencia de esta población de SMBH en el universo actual está fuertemente apoyada por el argumento de Soltan de que la densidad de masa media de estos SMBHs concuerda con las expectativas de la luminosidad integrada de los cuásares [44, 45]. Las afirmaciones sobre la detección de agujeros negros de masa intermedia (IMBHs, con masas que oscilan entre $100 - 10^4, M_{\odot}$) en el centro de los cúmulos globulares [46, 47] plantean la posibilidad de que estas correlaciones se extiendan a sistemas mucho más pequeños, pero hasta ahora la evidencia observacional más fuerte, aunque no concluyente, de la existencia de los IMBH son las fuentes ultraluminosas de rayos X [48, 49].

Aunque poco a poco comienza a emerger un consenso emergente sobre el crecimiento de los MBH de gran masa gracias al argumento de Soltan [44], los MBHs con masas de hasta $10^7 M_{\odot}$, como como nuestro propio MBH en el Centro Galáctico (con una masa de $\sim 4 \times 10^6 M_{\odot}$), son enigmáticos. Hay muchas explicaciones diferentes de sus masas: la acreción de múltiples estrellas desde direcciones arbitrarias [50, 51, 52, 53, 54], fusiones de objetos compactos como como agujeros negros de masa estelar y estrellas de neutrones [55] o IMBHs que caen sobre al MBH [56]. Otros medios más peculiares son la acreción de materia oscura [57] o el colapso de estrellas supermasivas [58, 59, 60, 61]. El origen de estas MBH de baja masa y, y, por tanto, el crecimiento temprano de todas las MBH, sigue siendo un enigma.

Las pocas parsecs centrales de una galaxia, su núcleo, consisten en un cúmulo estelar nuclear de unos pocos millones de estrellas que rodean el SMBH [véase e.g. 62]. Un pársec equivale a unos 3,26 años-luz. Naturalmente, se espera que el núcleo desempeñe un papel importante en la interacción entre el SMBH y la galaxia anfitriona. En el núcleo, las densidades estelares de un millón de estrellas por parsec cúbico y se pueden alcanzar velocidades relativas del orden de $\sim 100 - 1000 \text{ km s}^{-1}$. En estas condiciones excepcionales y a diferencia de lo que ocurre en cualquier otra parte de la galaxia, los efectos de las colisiones entran en juego (excepto en los cúmulos globulares). (excepto en los cúmulos globulares, pero una diferencia importante es que el SMBH da a la parte central del cúmulo casi un potencial kepleriano y, por tanto, unas características de resonancia muy complicadas. Esta es una de las razones por las que ha sido difícil analizar las estrellas aquí). Entre ellas se encuentra la llamada “relajación” de 2 cuerpos (es decir, desviaciones gravitacionales mutuas) y auténticas colisiones de contacto.

7.2. Sondas del horizonte de sucesos

La gravedad es la fuerza que menos entendemos en la naturaleza. Aunque sea absurda y parezca un artefacto matemático para Albert Einstein, una de las predicciones cardinales de su teoría es agujero negro. El elemento característico de un agujero negro es el horizonte de sucesos, el lugar donde se fabrican el espacio y el tiempo.

La razón por la que tenemos una larga lista de argumentos convincentes de que los masivos objetos oscuros que observamos en las galaxias son SMBHs es porque no tenemos *una buena razón, a saber, un indicio muy fuerte experimental de la existencia del horizonte de sucesos*.

Desgraciadamente, un horizonte de sucesos es algo notablemente diminuto desde el punto de vista de la galaxia, y difícil de detectar. Por ejemplo, en nuestro Centro Galáctico, el objeto oscuro masivo con una masa de $4 \times 10^6 M_{\odot}$ tendría un radio de Schwarzschild que subtiende un ángulo de apertura de 10^{-5} segundos de arco, lo que corresponde a unos 2 cm a la distancia de la luna.

Afortunadamente, tenemos sondas: Las estrellas. En la figura 7.2 representamos los tres ámbitos diferentes de la dinámica estelar. En la escala más grande existe la galaxia con un tamaño de unos pocos kiloparsecs. Como referencia, el radio gravitacional de un MBH de $10^6 M_{\odot}$ sería aproximadamente $\sim 5 \times 10^{-8}$ pc. El tiempo de relajación, t_{rlx} es una escala de tiempo que puede considerarse como el tiempo necesario para que las estrellas intercambien energía E y momento angular J entre ellas. Es el tiempo que necesitan las estrellas para “verse” unas a otras individualmente y no sólo el potencial estelar medio de fondo del de todo el sistema estelar. Para una galaxia, t_{rlx} es mayor que el tiempo de Hubble debido a la densidad estelar relativamente baja (ρ) en promedio a esta escala. Esto significa que, en promedio, las colisiones gravitacionales no tienen ninguna influencia en

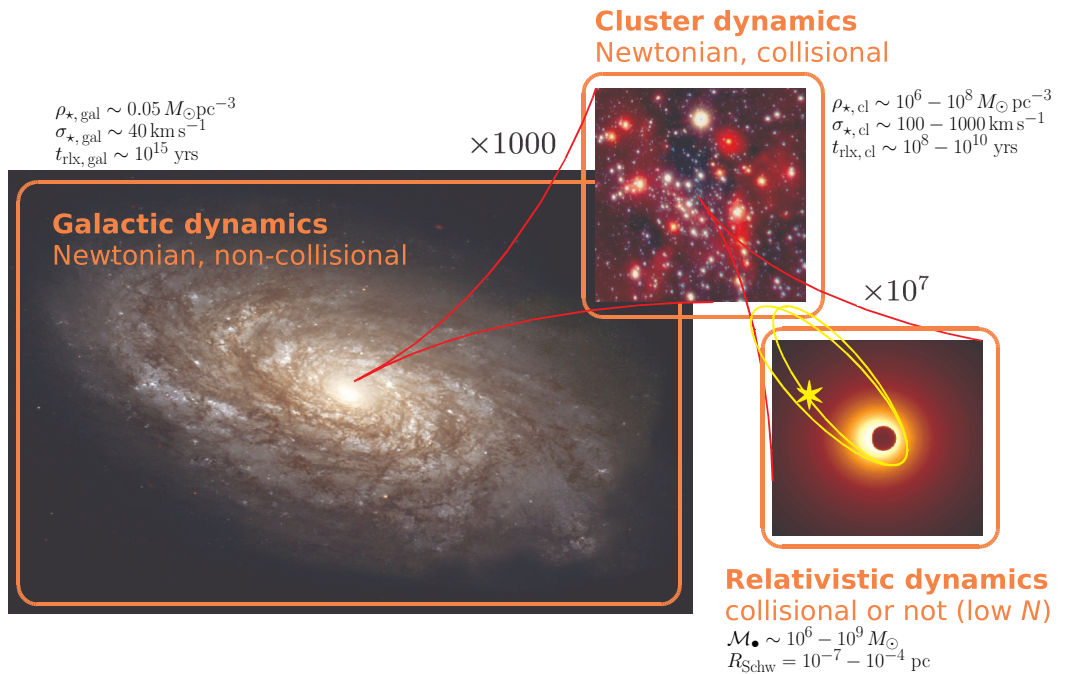


Figura 7.2: Los tres diferentes dominios a tener en cuenta para comprender la formación de una espiral por ondas gravitacionales.

la galaxia.

Una estrella de prueba sólo sentirá el potencial medio del resto de las estrellas y no intercambiará ni E ni J con ninguna otra estrella. El sistema es “sin colisiones”, en el sentido de que las interacciones de dos cuerpos pueden ser de dos cuerpos. Esto define el ámbito de la dinámica galáctica, la que se investiga en las simulaciones cosmológicas que utilizan, por ejemplo, integradores de cuerpos N .

Dado que no hay que las interacciones fuertes entre las estrellas, se pueden simular fácilmente simular diez mil millones de partículas. Si nos acercamos típicamente un factor de 10^3 , entramos en el núcleo galáctico, el régimen de la dinámica estelar (mayoritariamente newtoniana). de la dinámica estelar. Allí, $t_{\text{rlx}} \cong 10^8 - 10^{10}$ años, más corto que la edad de la galaxia. En este ámbito las estrellas sienten la granulosidad del potencial estelar. potencial estelar. La densidad estelar ρ y la dispersión de la velocidad estelar σ son órdenes de magnitud mayores.

Para este tipo de sistemas hay que tener en cuenta la relajación, el intercambio de E y J entre las estrellas. El sistema es “colisional”. Cuando hay que tener en cuenta esto en las simulaciones numéricas, el resultado es que no hemos podido simular todo el sistema de $10^6 \sim 10^7$ estrellas dentro de un tiempo asequible tiempo asequible con integradores de cuerpos N de suma directa.

Por último, en el panel de la derecha, tenemos tenemos el régimen relativista de la dinámica estelar cuando ampliamos el anterior por un factor de diez millones. Allí el papel de los efectos relativistas es crucial para la evolución del sistema. Estos sistemas pueden ser colisionales o sin colisiones, dependiendo del número de estrellas que tengamos en un momento dado. Si las estrellas pueblan esa región, intercambiarán E y J entre ellas. Sin embargo, la relajación no está bien definida en este régimen.

La forma en que las estrellas del último régimen, el más pequeño, giran alrededor del SMBH y interactúan con él se verá afectada por los efectos relativistas. Estas estrellas son sondas potenciales del horizonte de sucesos. Dos sondas diferentes son de particular interés:

- (1) Una estrella que pasa muy cerca de un SMBH puede desgarrarse debido a los efectos de marea de marea, y la interacción de los restos estelares en las proximidades del agujero negro dará lugar a una ráfaga de radiación electromagnética. Las características características de este evento de disrupción de marea (TDE), como su temperatura la luminosidad máxima y la escala de tiempo de desintegración, son funciones de la masa y el espín del SMBH central. La posterior acreción del gas de desecho por parte del agujero negro produce una emisión adicional, que puede utilizarse como sonda de la física de la acreción cerca del horizonte de sucesos [63, 64]: Es importante entender cómo las estrellas pueden afectar al flujo de acreción y su variabilidad. Ya se han detectado muchos candidatos de disrupción con ROSAT, Chandra y Swift, y el número aumentará con los próximos estudios de transitorios, como el Zwicky Transient Facility (ZTF), el Large Synoptic Survey Telescope (LSST), SRG/eROSITA [65], así como la misión L2 de la ESA Athena [66].
- (2) El espín y el momento cuadrupolar del agujero negro supermasivo en el centro galáctico puede medirse, en principio, mediante el seguimiento astrométrico de estrellas que orbitan a distancias de miliparsecs (mpc), lo que permite comprobar el teorema que prueba que todas las soluciones del agujero negro descritas en las ecuaciones de Einstein-Maxwell de gravitación y electromagnetismo en la relatividad general pueden ser caracterizadas por solo tres parámetros observables de manera externa: su masa, su carga y su momento angular. Si la estrella es un púlsar, es decir, una estrella de neutrones en rotación cuyo eje de radiación barre periódicamente nuestra línea de visión, la medición sería extremadamente precisa.
- (3) Además, el momento angular total de las órbitas estelares, como indicación de la rotación del cúmulo estelar nuclear, puede orientarse en una dirección estrechamente correlacionada con el eje de giro del SMBH debido a un efecto relativista llamado arrastre de marco.

Sin embargo, los dos tipos de sondas se agotarán rápidamente al interactúan con el SMBH central o con otras estrellas de los alrededores. Así que la cuestión central es cómo

reponer el régimen más pequeño para que haya otras estrellas que las sustituyan. Para conseguirlo, una estrella inicialmente alejada del SMBH debe encontrar su camino hacia una órbita de “cono de pérdida”, una órbita lo suficientemente alargada como para tener un pericentro muy cercano [67, 68, 69]. La tasa de reposición de las órbitas del cono de pérdida puede calcularse (semi) analíticamente si la distribución del espacio de fase de las estrellas alrededor del SMBH es conocida [51, 52, 70, para estimaciones en modelos de núcleos cercanos observados]. Para tener en cuenta la compleja influencia de las colisiones estelares y la evolución del núcleo a lo largo de miles de millones de años, se requieren simulaciones numéricas detalladas [71, 72, 73, 74, 75].

El estudio de los efectos de un potencial no esférico está sólo en una fase muy preliminar [51], y no está claro si este efecto podría mejorar la reposición del cono de pérdidas [74, 75, 76, 77, 78, 79].

El problema se agrava aún más, por ejemplo, por la presencia de múltiples poblaciones estelares cuyas distribuciones espaciales están segregadas (“segregación de la masa”), con estrellas más masivas más masivas se hunden más en el pozo de potencial y se acercan más al agujero negro central. Además, dos estrellas que interactúan pueden unirse gravitacionalmente (convertirse en binarias), de modo que durante las subsiguientes interacciones con otras estrellas o SMBHs se comporten de forma diferente a las estrellas individuales, o pueden colisionar entre sí, entonces la evolución posterior estará determinada por la dinámica del gas.

Como estos efectos “microfísicos” no suelen incorporarse al modelización global de los cúmulos estelares enteros, las predicciones teóricas de las de la abundancia y de los parámetros orbitales de las estrellas en los cúmulos relativistas. de las estrellas en el régimen relativista.

CAPÍTULO

8

ABERRACIÓN Y EFECTO DE HAZ DE ONDAS GRAVITACIONALES

8.1. Presentación del problema

La gravedad determina la estructura del Universo. Aunque está descrita de forma triunfal por la teoría de la relatividad general, sigue siendo la fuerza menos investigada de la naturaleza. Dos de sus predicciones cardinales son la existencia de agujeros negros y de ondas gravitacionales. Hemos entrado en la era de la astrofísica de las ondas gravitacionales gracias a los observatorios terrestres LIGO y Virgo. Tenemos una prueba directa de que Einstein tenía razón: Los agujeros negros que se fusionan producen ondas en el tejido del espacio-tiempo. Además, el telescopio Event Horizon ha captado la silueta de un enorme agujero negro en el centro de una galaxia, M87.

Cuando los objetos compactos (estrellas de neutrones, agujeros negros más pequeños, enanas blancas o, como he mostrado, incluso enanas marrones) se aventuran demasiado cerca de un agujero negro masivo, pierden energía y se acercan lentamente a él, describiendo una espiral: Giran alrededor del agujero negro masivo enviando miles de ráfagas de ondas gravitacionales y finalmente desaparecen en la oscuridad, una vez que cruzan el horizonte de sucesos, el punto de no retorno incluso para la luz.

La información codificada en las ondas nos proporcionará una cartografía precisa del espaciotiempo deformado. Estas espirales serán observadas en detalle con el futuro observatorio LISA y el Telescopio Einstein y, afortunadamente, como he demostrado anteriormente, deben estar presentes ya en los datos de LIGO/Virgo, aunque ocultas.

Mis colaboradores y yo hemos descubierto recientemente que, de forma similar a la luz, las ondas gravitacionales pueden sufrir de aberración. Las espirales, un tema en el que tengo más de quince años de experiencia, representan una sonda perfecta de estos efectos. Es necesario abordarlos con más detalle lo antes posible. Esto se debe a que:

- Estos efectos son medibles con los detectores actuales, y deben tenerse en cuenta porque distorsionarán las observaciones. Si los ignoramos, podríamos malinterpretarlos, clasificar erróneamente los objetos astrofísicos o perder las observaciones por completo.
- Se están construyendo futuros detectores que costarán miles de millones de euros. Es crucial comprender estos nuevos efectos para garantizar el éxito de las detecciones.
- Aunque tenemos resultados preliminares, necesitamos ir a órdenes superiores y entender cómo se entrelazan los efectos.
- Al abordar esta nueva línea de efectos físicos, espero que se abran nuevas ventanas, nuevos efectos físicos.
- Una aplicación muy importante es que se pueden derivar propiedades de la galaxia anfitriona, en particular velocidades peculiares. Esto puede utilizarse para hacer la cartografía de cúmulos de galaxias a distancias tan grandes que queden fuera del alcance de la luz. Si tenemos acceso a la masa contenida en el cúmulo, podemos hacer un mapa de la distribución de la materia oscura.

8.2. Mi experiencia en el campo

El trabajo que he realizado en este campo me sitúa en una buena posición para dirigir con éxito este tipo de investigación.

He sido el impulsor del descubrimiento de estos nuevos efectos que son la base de este proyecto de investigación. Mi formación es en astrofísica y he dedicado los últimos (más de) diecisiete años de mi vida a la ciencia de las ondas gravitacionales, que comenzó mucho antes de la detección de 2015. De hecho, el equipo de LIGO/Virgo reconoció en el documento que presenta las propiedades astrofísicas de la primera detección [80] mis predicciones anteriores sobre las fuentes [81], ya que coincidían perfectamente con los datos.

Me he especializado en espirales, tema en el que se me considera un experto mundial. Me han invitado a publicar un artículo de revisión sobre este tema en *Living Reviews of Relativity* [82, de 150 páginas, con un factor de impacto de 22]. He organizado 20 congresos sobre este tema (<https://astro-gr.org/congresos/>), y he acumulado unas 50 charlas invitadas y plenarias. Co-presido el Grupo de Trabajo EMRIs para la misión LISA de la ESA/NASA y soy coordinador del capítulo inspirador en astrofísica para el libro blanco de la ciencia que se utilizará para construir LISA.

En el Instituto Albert Einstein de Potsdam, donde pasé doce años, tuve la oportunidad de crear mi propio grupo de investigación llamado “Astrofísica de ondas gravitacionales”, apoyado por proyectos concedidos dentro en tres programas diferentes (el programa de centros de investigación de la DFG, el programa de investigación de la DFG y el programa de la Fundación Von Humboldt), lo que supuso una suma de unos 800.000 euros. Mi estancia en el Max Planck fue un paso importante para construir un perfil de investigación de alto impacto.

Más tarde volví a crear un grupo de investigación sobre Astrofísica de Ondas Gravitacionales, centrado en las inspirales, aunque esta vez en China, en el Instituto Kavli de Astronomía y Astrofísica, en la Universidad de Pekín, junto con la Academia China de Ciencias. Mi puesto principal está basado en España desde 2017.

CAPÍTULO

9

DESCRIPCIÓN FÍSICA Y ÓRDENES SUPERIORES

Como mencionaba antes, recientemente, y con la ayuda de mis colaboradores, hemos descubierto dos nuevos efectos relativistas de las fuentes de ondas gravitacionales: los efectos de haz y de aberración. Estos efectos comparten similitudes con el haz y la aberración de la luz, pero también difieren significativamente en sus propiedades fundamentales y distorsionan la interpretación de la señal [83, 84, 85].

Un objeto en movimiento aparecerá distorsionado para un observador lejano debido a la velocidad finita de la luz y a las ondas gravitacionales [GWs, véase por ejemplo 86]. La parte izquierda de la figura 9.1 muestra en la parte superior un esquema de una órbita circular vista por un observador para el que la fuente está en reposo, mientras que la parte inferior muestra la misma órbita vista por un observador para el que la fuente está en movimiento.

En el lado derecho hay una ilustración de las GW emitidas por estas fuentes. Como podemos ver, las dos ondas difieren en su fase y amplitud. En cuanto a los modos (o sobretonos), la diferencia entre las dos ondas es que la onda de la fuente en reposo sólo contiene el modo básico, es decir, una onda sinusoidal de amplitud y frecuencia fijas, mientras que la onda de la fuente en movimiento contiene también modos superiores, es decir, es una

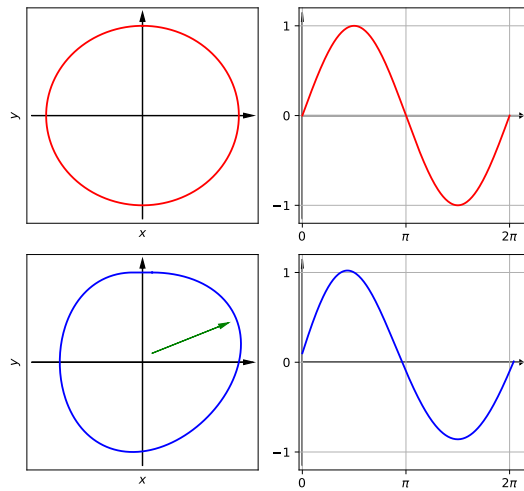


Figura 9.1: Esquemas de las órbitas y sus correspondientes GW. En la parte izquierda se representan los bocetos de una órbita circular (gráfico superior) y la misma órbita distorsionada por una velocidad, representada por la flecha verde (gráfico inferior). En la parte derecha vemos las GW que estarían relacionados con las dos órbitas.

superposición de varias ondas sinusoidales de frecuencias crecientes y amplitudes decrecientes.

El comportamiento de las fuentes reales y las formas de onda precisas es similar al esbozado en la figura 9.1 y puede atribuirse a

- (a) el efecto Doppler en la frecuencia de los GWs,
- (b) la aberración, y
- (c) la rotación de la polarización.

El efecto Doppler se ha estudiado ampliamente en el pasado y sus efectos en los GW son bien conocidos [87, 88]. La aberración y la rotación de la polarización están menos estudiadas, pero en [89] demostré, junto con colaboradores, que los dos efectos, que denominamos efecto de haz, afectarán a la amplitud detectada de un GW. En el mismo trabajo discutimos además que el cambio en la amplitud no es un cambio de la amplitud global del GW, sino de la amplitud respectiva de cada modo, y que esto afecta significativamente a la detección y a la extracción de parámetros. En [90] demostramos cómo la aberración puede afectar directamente a la fase de una GW, en el caso de una velocidad dependiente del tiempo. Además, la amplitud del haz afectará a la fuerza detectada de la GW y, por tanto, a nuestra interpretación de la distancia a la fuente.

Mis colaboradores y yo hemos comprobado en las referencias mencionadas previamente que el efecto de los rayos puede desvincularse de otros efectos. El aumento de la amplitud de los modos superiores debido al movimiento es diferente del aumento debido a

un cambio en la masa relativa de los dos objetos compactos en la binaria. En particular, presentamos un estudio preliminar que indica una interacción entre estos efectos que aumenta la amplitud relativa de los modos superiores. Por lo tanto, incluir el efecto beaming a las formas de onda debería permitir no sólo corregir el error que de otra manera se haría, sino también extraer información sobre el movimiento de la fuente y su anfitrión.

Los siguientes pasos que quiero dar son:

- (1) Comprender la evolución de los modos para cada fuente.
- (2) Calcular cómo afecta la velocidad a los modos particulares de las fuentes.
- (3) Incluir el efecto obtenido en las formas de onda existentes para estas fuentes.
- (4) Predecir y formular las formas de onda; en particular, la relación de los modos particulares que pueden atribuirse al movimiento de la fuente.

9.1. Órdenes superiores: Armónicos esféricos de espín 2

Siguiendo la famosa cita de Donald Lynden-Bell, uno de los padres fundadores de nuestra comprensión moderna de los agujeros negros masivos:

"Sólo un tonto intenta el problema más difícil cuando no entiende el caso especial más simple" (Sec. 4.5 de [91])

hasta ahora hemos considerado los efectos de haz en los modos hasta el orden lineal de la velocidad [1]. El siguiente paso es explorar los modos superiores, en particular porque se mezclan cuando se descompone la onda gravitacional utilizando los llamados "armónicos esféricos de espín 2" [92, 93, 94].

En relatividad general, las GWs tienen dos componentes independientes, la polarización $+$, h_+ , y la polarización $\times$, $h_\times$, que pueden combinarse con la amplitud compleja

$$H(\theta, \phi) := h_+(\theta, \phi) - ih_\times(\theta, \phi).$$

Utilizando esta amplitud compleja podemos descomponer la GW en sus componentes esféricas, que describen la "forma" de la fuente, y sus componentes temporales/radiales, que describen su "evolución".

Las componentes esféricas se describen mediante armónicos esféricos que tienen más o menos relevancia según el espín, ${}_sY^{\ell,m}(\theta, \phi)$, de espín $s = -2$ [92]

$$H(\theta, \phi) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} H^{\ell,m} {}_{-2}Y^{\ell,m}(\theta, \phi). \quad (9.0)$$

Los $H^{\ell,m}$ se denotan como los (ℓ, m) -modos de la GW y son sólo funciones del tiempo y de la coordenada radial. Se definen como

$$H^{\ell,m} := \int H(\theta, \phi) {}_{-2}\bar{Y}^{\ell,m}(\theta, \phi) d\Omega, \quad (9.0)$$

donde ${}_{-2}\bar{Y}^{\ell,m}(\theta, \phi)$ es el complejo conjugado de ${}_{-2}Y^{\ell,m}(\theta, \phi)$ y $d\Omega$ representa la integral sobre el ángulo sólido para (θ, ϕ) con $\theta \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$.

Los armónicos esféricos ponderados por el espín pueden expresarse explícitamente como [94]

$${}_sY^{\ell,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(\ell+m)!(\ell-m)!(2\ell+1)}{4\pi(\ell+s)!(\ell-s)!}} e^{im\phi} \sum_{k=0}^{\ell-s} (-1)^{\ell-k-s+m} \binom{\ell-s}{k} \binom{\ell+s}{k+s-m} \cos^{2k+s-m}\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^{2\ell-2k-s+m}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

donde

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!k!}, & \text{if } 0 \leq k < n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (9.-2)$$

son los coeficientes binomiales y n es el factorial de n .

Los armónicos esféricos ponderados por el espín cumplen las dos siguientes propiedades diferenciales [92]

$$\begin{aligned} J_z {}_sY^{\ell,m} &= im {}_sY^{\ell,m}, \\ J_{\pm} {}_sY^{\ell,m} &= i\sqrt{(\ell \mp m)(\ell + 1 \pm m)} {}_sY^{\ell,m \pm 1}, \end{aligned}$$

donde $J_z := \partial_\phi$ y $J_{\pm} := e^{\pm i\phi}(\pm i\partial_\theta - \cot(\theta)\partial_\phi - is \csc(\theta))$ y la identidad

$$\int {}_sY^{\ell,m}(\theta, \phi) {}_{s'}\bar{Y}^{\ell',m'}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{s,s'} \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}, \quad (9.-2)$$

En esta expresión $\delta_{a,b}$ es la delta de Kronecker. Además, para el complejo-conjugado de un armónico con peso de espín, hemos usado

$${}_s\bar{Y}^{\ell,m}(\theta, \phi) = (-1)^{s+m} {}_{-s}Y^{\ell,-m}(\theta, \phi). \quad (9.-2)$$

Podemos usar esto para tener una primera impresión del efecto de aberración: Al igual que en el caso de la luz, la velocidad de los GW es finita pero igual para todos los observa-

dores. Por lo tanto, un observador en reposo y otro en movimiento con respecto a la fuente ven los rayos GW apuntando en direcciones diferentes. Este efecto, conocido como 'aberración' para la luz [95], cambia la forma percibida de una fuente de GW y, por tanto, su descomposición en modos.

En el marco de la fuente, el vector de dirección de un rayo GW (la parte espacial del vector de onda) puede describirse convenientemente mediante el vector radial

$$\mathbf{e}_r := [\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)].$$

Utilizando una transformación de Lorentz y normalizando el vector resultante, encontramos que el vector dirección en el marco del observador tiene la forma

$$\mathbf{e}'_r = \frac{\mathbf{e}_r - \gamma \mathbf{v} + \gamma^2 \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} / (\gamma + 1)}{\gamma (1 - \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{v} \rangle)}, \quad (9.-2)$$

donde $\gamma := (1 - v^2)^{-1/2}$ es el factor de Lorentz y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar euclidiano tridimensional.

La aberración del rayo hace que el vector de dirección que originalmente apuntaba hacia (θ, ϕ) en el marco de la fuente ahora apunta hacia (θ', ϕ') en el marco del observador. Los ángulos en el marco del observador pueden calcularse utilizando el vector de dirección, $\mathbf{e}'_r$, como

$$\begin{aligned} \cos(\theta') &= (\mathbf{e}'_r)_z = \mathcal{D}(\theta, \phi) (\cos(\theta) + \mathcal{C}(\theta, \phi) v_z), \\ \tan(\phi') &= \frac{(\mathbf{e}'_r)_y}{(\mathbf{e}'_r)_x} = \frac{\sin(\theta) \sin(\phi) + \mathcal{C}(\theta, \phi) v_y}{\sin(\theta) \cos(\phi) + \mathcal{C}(\theta, \phi) v_x}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{C}(\theta, \phi) := \gamma^2 \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{v} \rangle / (\gamma + 1) - \gamma$ and $\mathcal{D}(\theta, \phi) := 1 / \gamma (1 - \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{v} \rangle)$. Nótese que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son funciones de las coordenadas esféricas debido a la proyección del vector velocidad, $\mathbf{v}$, sobre el vector radial, $\mathbf{e}_r$.

Los modos de los GW representan la descomposición de la onda según sus propiedades esféricas. Un movimiento del CdM de la fuente puede afectar a la forma de la fuente a través de la aberración y la rotación de la polarización, cambiando así estos modos. En esta sección mostramos cómo los modos de GW aparentes para un observador cambian con la velocidad de la fuente.

Derivamos expresiones explícitas para los modos de una fuente en movimiento, $H'^{\ell, m}$, en términos de los modos de una fuente en reposo, $H^{\ell, m}$, y la velocidad de un observador que se mueve con respecto a la fuente, $\mathbf{v}$, hasta el orden principal de la amplitud de la velocidad, v . Esta expansión está bien motivada físicamente, ya que esperamos que la mayoría de las fuentes tengan velocidades CoM mucho menores que la velocidad de la luz.

Expandiendo la amplitud compleja de la fuente en movimiento, H' , hasta un orden li-

neal en v , obtenemos

$$H'(\theta', \phi') \approx H'(\theta', \phi')|_{v=0} + \left[\partial_{\theta'} H'(\theta', \phi') \frac{d\theta'}{dv} + \partial_{\phi'} H'(\theta', \phi') \frac{d\phi'}{dv} + \partial_v H'(\theta', \phi') \right]_{v=0} v.$$

Usando la regla del producto y de la cadena, y que $\theta'|_{v=0} = \theta$ y $\phi'|_{v=0} = \phi$, obtenemos

$$H'(\theta', \phi') \approx H(\theta, \phi) + \left(\partial_{\theta} H(\theta, \phi) \frac{d\theta'}{dv} \Big|_{v=0} + \partial_{\phi} H(\theta, \phi) \frac{d\phi'}{dv} \Big|_{v=0} - 2iH(\theta, \phi) \frac{d\alpha}{dv} \Big|_{v=0} \right) v.$$

La rotación de la polarización sólo entra hasta el tercer orden de v y por tanto podemos ignorar el último término de la ecuación anterior. Además, si expandimos θ' y ϕ' utilizando 9.1 encontramos

$$H'(\theta', \phi') \approx H(\theta, \phi) + \frac{1}{\sin(\theta)} [(\partial_{\theta} H(\theta, \phi))(v_z - v_r \cos(\theta)) + (\partial_{\phi} H(\theta, \phi))(v_x \sin(\phi) - v_y \cos(\phi))],$$

donde $v_r := \langle \mathbf{v}, \mathbf{e} \rangle$.

Las coordenadas con prima son en realidad funciones de las coordenadas sin prima, es decir, $\theta' = \theta'(\theta, \phi)$ y $\phi' = \phi'(\theta, \phi)$. Además, el lado derecho de Eq. (9.1) es ahora sólo una función de (θ, ϕ) . Por lo tanto, podemos tratar el H' como una función de (θ, ϕ) , $H' = H'(\theta, \phi)$. Entonces, utilizando la descomposición de H en términos de armónicos esféricos ponderados de espín en Eq. (9.1) y las propiedades diferenciales anteriores, encontramos

$$H'(\theta, \phi) \approx \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (1 + f_{\ell,m}(\theta, \phi)) H^{\ell,m}_{-2} Y^{\ell,m}(\theta, \phi), \quad (9.-6)$$

donde

$$f_{\ell,m}(\theta, \phi) := \frac{1}{\sin(\theta)} \left[im(v_z - v_r \cos(\theta)) + \frac{1}{2} A(\ell, m)(v_x \sin(\phi) - v_y \cos(\phi)) \right]$$

y

$$A(\ell, m) := \sqrt{(\ell - m)(\ell + 1 + m)} - \sqrt{(\ell + m)(\ell + 1 - m)}.$$

Aquí hay que notar que, si bien (θ, ϕ) se definió originalmente como el CO de la fuente, un observador ajeno a la velocidad supondría que su CO es idéntico a éste.

Por lo tanto, utilizaremos (θ, ϕ) como las coordenadas esféricas para descomponer la onda en sus modos. Esto no representa, sin embargo, ninguna restricción para nuestros resultados. Incluso si el observador fuera consciente del movimiento de la fuente, sería más natural para él o ella elegir una CO que sea una copia de (θ, ϕ) que utilizar la CO no rectilínea (θ', ϕ') .

Los $f_{\ell, m}$ son funciones de las coordenadas esféricas. Por lo tanto, necesitamos descomponer aún más Eq. (9.1) para obtener expresiones en términos de sólo los armónicos esféricos de espín 2 y funciones de sólo las coordenadas temporales y radiales. Descomponemos H' en términos de armónicos esféricos de espín 2, encontrando así

$$H'(\theta, \phi) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} H'^{\ell, m} {}_{-2}Y^{\ell, m}(\theta, \phi), \quad (9.-8)$$

donde

$$H'^{\ell, m} = \int H'(\theta, \phi) {}_{-2}\bar{Y}^{\ell, m}(\theta, \phi) d\Omega. \quad (9.-8)$$

Usando Eqs. (9.1) and (9.1), obtenemos entonces

$$\begin{aligned} H'^{\ell, m} &= H^{\ell, m} + (-1)^m \sum_{\ell'=2}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} H^{\ell', m'} \\ &\times \int f_{\ell', m'}(\theta, \phi) {}_{-2}Y^{\ell', m'}(\theta, \phi) {}_2Y^{\ell, -m}(\theta, \phi) d\Omega. \end{aligned}$$

Ésta integral puede resolverse analíticamente utilizando las expresiones anteriores en y descomponiéndola en sus integrales parciales, para encontrar

$$\begin{aligned}
H'^{\ell,m} = H^{\ell,m} - \frac{(-1)^m}{4^{\ell+1}i} & \left[\sum_{\ell_0=\max(2,|m|)}^{\infty} \frac{H^{\ell_0,m}}{4^{\ell_0}} C_0(\ell_0, \ell, m) \right. \\
& + \sum_{\ell_+=\max(2,|m+1|)}^{\infty} \frac{H^{\ell_+,m+1}}{4^{\ell_+}} C_+(\ell_+, \ell, m) \\
& \left. + \sum_{\ell_-=\max(2,|m-1|)}^{\infty} \frac{H^{\ell_-,m-1}}{4^{\ell_-}} C_-(\ell_-, \ell, m) \right].
\end{aligned}$$

Las expresiones explícitas de $C_0(\ell_0, \ell, m)$, $C_+(\ell_+, \ell, m)$ y $C_-(\ell_-, \ell, m)$ son

$$\begin{aligned}
C_0(\ell_0, \ell, m) &:= 2\pi m v_z F(\ell_0, m; \ell, m) \sum_{k=\max(0,m+2)}^{\ell_0+2} \sum_{a=0}^{2\ell_0-2k+m+2} \sum_{b=0}^{2k-m-2} \\
& \sum_{k'=\max(0,m-2)}^{\ell-2} \sum_{a'=0}^{2\ell-2k'-m-2} \sum_{b'=0}^{2k'+m+2} (-1)^{a+a'} G(\ell_0, m, k, a, b; \ell, m, k', a', b') \delta_{p,0}, \\
C_+(\ell_+, \ell, m) &:= v_+ F(\ell_+, m+1; \ell, m) \sum_{k=\max(0,m+3)}^{\ell_++2} \sum_{a=0}^{2\ell_+-2k+m+3} \sum_{b=0}^{2k-m-3} \\
& \sum_{k'=\max(0,m-2)}^{\ell-2} \sum_{a'=0}^{2\ell-2k'-m-2} \sum_{b'=0}^{2k'+m+2} (-1)^{a+a'} G(\ell_+, m+1, k, a, b; \ell, m, k', a', b') \\
& \left[\frac{A(\ell_+, m+1)}{p(p^2-4)} \delta_{|\text{mod}(p,2)|,1} + \frac{\pi}{4} (m+1) (\delta_{p,2} - \delta_{p,-2}) \right], \\
C_-(\ell_-, \ell, m) &:= v_- F(\ell_-, m-1; \ell, m) \sum_{k=\max(0,m+1)}^{\ell_-+2} \sum_{a=0}^{2\ell_- - 2k + m + 1} \sum_{b=0}^{2k - m - 1} \\
& \sum_{k'=\max(0,m-2)}^{\ell-2} \sum_{a'=0}^{2\ell-2k'-m-2} \sum_{b'=0}^{2k'+m+2} (-1)^{a+a'} G(\ell_-, m-1, k, a, b; \ell, m, k', a', b') \\
& \left[\frac{A(\ell_-, m-1)}{p(p^2-4)} \delta_{|\text{mod}(p,2)|,1} + \frac{\pi}{4} (m-1) (\delta_{p,2} - \delta_{p,-2}) \right],
\end{aligned}$$

donde $v_{\pm} := v_x \pm i v_y$ es una combinación de los componentes de la velocidad en el plano orbital de la binaria y $p := \ell' + \ell - a' - a - b' - b$ (aquí ℓ' representa ℓ_0, ℓ_+ o ℓ_-). Hay que notar que en Eqs. (9.1) and (9.1) la $\delta_{|\text{mod}(p,2)|,1}$ se cancela para los casos en que $p(p^2-4)$ tiene una raíz; es decir, estos coeficientes están bien definidos.

Estos resultados iniciales nos permiten derivar que para una fuente de GWs que se mueve con una velocidad constante, la amplitud de los modos cambia debido a una "interacción" con otros modos.

Esto nos permite describir el efecto de una velocidad constante en la polarización compleja de los GWs sin restricciones en la velocidad o la fuente. Asimismo, podemos derivar una expresión analítica para el cambio de los modos a primer orden en la magnitud de la velocidad. Esto nos permite demostrar que considerando la excitación de los modos se rompe la degeneración masa-desplazamiento de los GWs. Además, la excitación de los modos conduce a un cambio de frecuencia dependiente del tiempo, donde el cambio de la frecuencia de la polarización $+$ depende del cambio de la amplitud de la polarización $\times$ y viceversa.

En particular, queremos destacar que este efecto rompe la degeneración entre la masa y el desplazamiento Doppler para las GWs y representa el primer método para detectar la velocidad constante de una fuente utilizando únicamente los GWs.

CAPÍTULO

10

INFLUENCIA EN LAS DETECCIONES E INTERPRETACIONES

10.1. Medida de estos efectos con los detectores actuales

En la figura 10.1, que se basa en la Fig. (5) de nuestro artículo [84], mostramos la relación señal-ruido (SNR) que los observatorios de ondas gravitacionales terrestres LIGO/Virgo requieren para ver estos efectos en función de la velocidad relativa a la fuente. La SNR mínima que garantiza una detección es algo inferior a 10, pero hemos marcado con una línea negra gruesa el valor 10. Podemos ver que una $SNR = 10$ ya permite ver los efectos debidos a velocidades superiores a 1100 km/s. La primera detección de LIGO tuvo un $SNR=25$, lo que nos permitiría sondear velocidades tan bajas como 500 km/s. En un futuro próximo, LIGO/Virgo será actualizado. En particular, la llamada “propuesta A+” para LIGO podría casi duplicar la sensibilidad de Advanced LIGO y aumentar el volumen del espacio buscado en un factor de siete [96]. Está previsto que las mejoras se instalen a partir de ahora y hasta 2019 que el detector actualizado esté operativo en 2024¹. Esto permitirá

¹https://www.nsf.gov/news/news_summ.jsp?cntn_id=297414

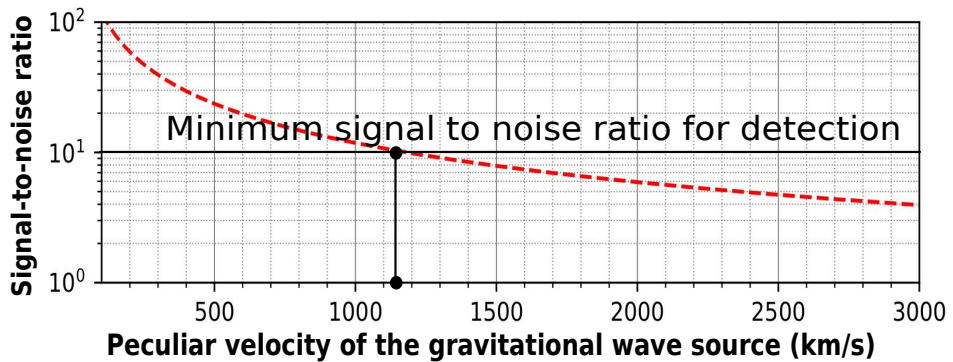


Figura 10.1: Relación señal/ruido necesaria para detectar los nuevos efectos en función de la velocidad peculiar de la fuente. Esta figura está basada en la Fig. (5) de nuestro trabajo [84].

detectar muchas más fuentes con una SNR mucho mayor.

10.2. Las velocidades peculiares son lo suficientemente altas como para que estos efectos sean cruciales

Para que estos efectos alteren la observación de la onda gravitacional, es crucial que la fuente se mueva con respecto a nosotros a una velocidad relativamente grande, de unos cientos de kilómetros por segundo, como demostramos en [3]. Es importante señalar que estamos hablando de las velocidades peculiares de las galaxias, y no de la cosmológica, que ya se tiene en cuenta para las detecciones actuales de LIGO/Virgo.

Sabemos que las galaxias tienen una distribución de velocidades peculiares que crece en función de la distancia a nosotros, pasando de unos 300 km/s a 300 Mpc [97] a unos 1700 km/s a 6000 Mpc [98], donde se encuentran la mayoría de las binarias de LIGO/Virgo. Esto significa que aproximadamente el 40 % de las binarias medidas tendrán velocidades de bulto superiores a 1000 km/s, y por tanto sus parámetros estarán sistemáticamente sesgados por los nuevos efectos relativistas que hemos descubierto. Además del dipolo de masa, alrededor del 20 % de las galaxias se encuentran en cúmulos de galaxias ricos [99], y orbitan alrededor del centro de masa del cúmulo con dispersiones de velocidad de 1000 km/s [como sabemos desde hace casi un siglo, 100]. Los cúmulos de galaxias ricos contienen un mayor número de galaxias elípticas de mayor masa. Esto significa que el porcentaje de fuentes de ondas gravitacionales será aún mayor, porque las galaxias anfitrionas son más grandes, contienen más estrellas y objetos compactos. Estas altas velocidades de los constituyentes galácticos de los cúmulos con respecto al centro de masa del cúmulo se deben a las grandes masas de los cúmulos. Si suponemos un sistema virializado y un mo-

mento de inercia de la distribución de las galaxias casi constante, de modo que la forma global del cúmulo evoluciona lentamente en comparación con el tiempo dinámico local, la masa de cada cúmulo se puede estimar mediante el teorema virial (véase, por ejemplo, [101], y véase [102] para el caso de que la presión externa pueda ser importante) como $M = \alpha \sigma^2 r / G$, donde α es un parámetro de orden uno determinado por la forma del cúmulo. Dado que los radios característicos de los cúmulos son de pocos Mpc, se estima que sus masas dinámicas son hasta o incluso superiores a $M = 10^{15} M_{\odot}$.

En la figura 10.2 mostramos una muestra de velocidades peculiares de cúmulos de galaxias (un punto es una gran colección de galaxias) en función del desplazamiento al rojo que hemos realizado a partir de los datos de [16; 17]. En general, dado que los dos movimientos que hemos descrito no deberían estar correlacionados, cabría esperar que alrededor del 60 % de todas las fuentes de ondas gravitacionales tuvieran efectos medibles de nuestros nuevos efectos físicos impresos en sus formas de onda. En la figura, la barra vertical a unos 300 Mpc corresponde al límite típico de los estudios ópticos que buscan kilonovas, la contrapartida electromagnética de las inspirales de las estrellas de neutrones, tal y como se ha observado (véase <https://kilonova.org> para todos los detalles relacionados con la detección de las primeras contrapartidas electromagnéticas de una espiral de este tipo, encontrada en la galaxia NGC 4993, a sólo 140 millones de años luz, muy dentro de los límites).

10.3. Impacto en la detección y extracción de parámetros

El número de ciclos que describen dos objetos compactos antes de fusionarse está relacionado con su relación de masas [véase, por ejemplo 18]. Cuanto mayor sea la relación de masas, mayor será el número de ciclos en banda. Mientras las fuentes están en banda la amplitud de todos los modos cambiará [19–22] e inducirán, a través del efecto del haz, un desplazamiento de fase creciente. En la Fig. (4) examinamos las diferentes contribuciones de los modos normalizados a $A_{2,2}$. Los datos provienen del trabajo de [23], su Fig. 3, que utiliza un formalismo de cuerpo único efectivo (EOB) para estimar la evolución de los modos subdominantes. Añadimos también la frecuencia orbital para dar una referencia de la evolución del sistema, y coincide con el trabajo de [19]. Este desplazamiento de fase adicional causará una gran confusión en la interpretación de las fuentes de GWs, como mostramos en [1], hasta el punto de que podríamos pasar por alto la detección de las fuentes por completo, al no tener en cuenta los efectos que mis colaboradores y yo hemos descrito. Dadas dos formas de onda diferentes, h_1 (la putativa, es decir, la teórica, suponiendo que la fuente está en reposo) y h_2 (la observada, albergada por una galaxia que se mueve respecto a nosotros), la forma habitual de medir cuánto difieren entre sí es evaluar un factor de ajuste (FF) definido por

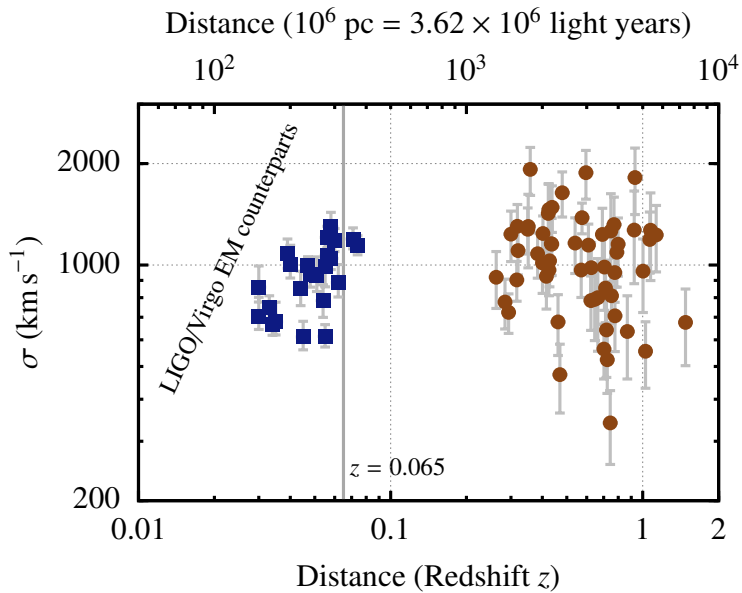


Figura 10.2: Dispersión de velocidad medida de los cúmulos de galaxias en función del desplazamiento al rojo (eje X inferior) y de la distancia en Mpc y años-luz (eje X superior) a partir de los datos de [103] para los datos a distancias cercanas (cuadrados azules) y de [104], para los que se encuentran a distancias mayores (círculos marrones). Añadimos las barras de error tanto para la dispersión de la velocidad como para la distancia, aunque esta última no aparece porque es de menor tamaño que los símbolos. La línea horizontal gris muestra un desplazamiento al rojo de unos 300 Mpc (véase el texto).

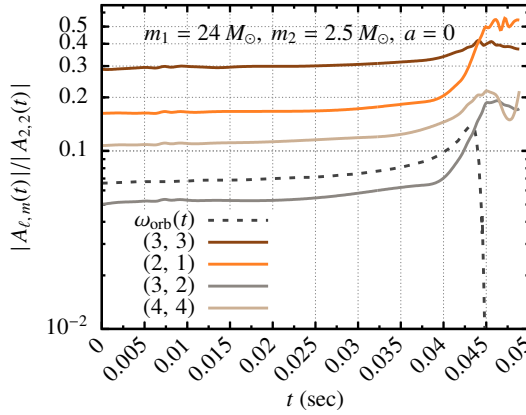


Figura 10.3: Evolución de las amplitudes para los diferentes modos de [105] normalizada al modo (2, 2) y para una frecuencia orbital $\omega_{\text{orb}}(t)$, adaptada a un sistema de masas $m_1 = 24 M_\odot$ y $m_2 = 2.5 M_\odot$, es decir, con una proporción de masas $q = 9.6$. Comenzando desde $t = 0$ y de arriba a abajo, podemos ver las amplitudes de los modos (3, 3), (2, 1), (4, 4) and (3, 2). La línea a trazos corresponde a la frecuencia orbital, $\omega_{\text{orb}}(t)$.

$$\text{FF} \equiv \frac{\langle h_1 | h_2 \rangle}{\sqrt{\langle h_1 | h_1 \rangle \langle h_2 | h_2 \rangle}}, \quad (10.0)$$

donde

$$\langle h_1 | h_2 \rangle = \int \frac{h_1(f)^* h_2(f)}{S_n(f)} df \quad (10.0)$$

de modo que $\text{FF} = 1$ cuando hay una coincidencia perfecta entre la forma de onda putativa y la observada. Para simplificar los cálculos y tener una impresión del orden de magnitud del impacto del efecto del haz, en nuestro trabajo, mis colaboradores y yo hicimos una serie de simplificaciones. Primero tomamos un rango de frecuencias de la fuente de interés en la ventana de sensibilidad de LISA [106] tal que el tiempo transcurrido en ese rango es lo suficientemente corto como para que podamos aproximar $S_n(f)$ como un valor constante y factorizarlo a partir de la integral. Por lo tanto, gracias al teorema de Parseval, la integral restante es la correlación entre las dos formas de onda en el dominio del tiempo. En segundo lugar, adoptamos las siguientes formas de onda simplificadas,

$$\begin{aligned} h_1(t) &= A_1(t) \cos(\phi_1(t) + \phi) \\ h_2(t) &= A_2(t) \cos(\phi_2(t)), \end{aligned}$$

donde $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son la evolución de la fase de un determinado armónico, que es m veces la fase orbital y ϕ es la fase inicial, una constante.

Entonces, como tercera aproximación, descomponemos el producto en dos partes y como la sinusoidal oscila rápidamente, y la despreciamos a lo largo del tiempo total de integración (fijar una fase inicial nos permite elegir que sea $\pi/2$, y entonces obtenemos una señal sinusoidal). Por lo tanto, la estimación de FF se simplifica considerablemente. Además, observamos que mientras el FF muestra la similitud entre dos formas de onda, el que podamos distinguir estas dos formas de onda depende adicionalmente de la intensidad de la señal, que viene dada por la relación señal/ruido $\rho = \langle h|h \rangle$. Para una ρ dada, si $FF > 1 - 1/(2\rho^2)$, no podremos distinguir dos formas de onda diferentes aunque el FF parezca grande [107].

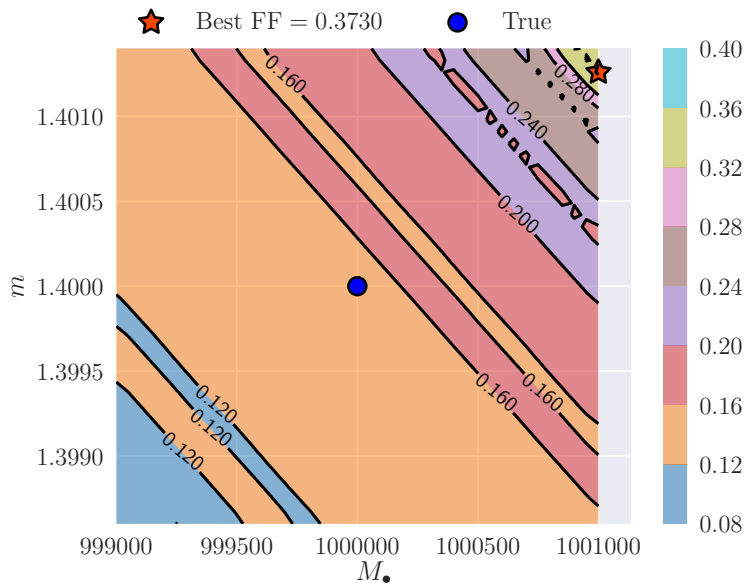


Figura 10.4: Mapa de calor para la distribución del factor de ajuste de un sistema compuesto por un agujero negro masivo de masa $M_{\bullet} = 10^6 M_{\odot}$ y una estrella de neutrones de masa $m = 1,4 M_{\odot}$. La binaria se encuentra en una galaxia anfitriona que se mueve a una velocidad relativa de 1000 km s^{-1} respecto a nosotros. Esta es una velocidad media que tienen al menos el 60 % de las galaxias que albergan fuentes de GW, como discutimos en el texto. El círculo azul situado en el centro de la figura corresponde a los valores reales del sistema y la estrella roja de la esquina superior derecha al factor de mejor ajuste encontrado por el algoritmo de búsqueda, de 0,3730, lo que significa que el sistema no se observaría.

En la figura 10.4, mostramos la distribución del factor de ajuste (FF) de una fuente GW compuesta por un agujero negro masivo y una estrella de neutrones utilizando un algoritmo de recocido para encontrar el máximo FF. Tenemos $FF = 1$ cuando hay una coincidencia perfecta entre la forma de onda putativa (que significa “modelada”) y la observada (que significa “real”). Para obtener los resultados de la figura hemos supuesto que la forma de onda putativa no tiene en cuenta la velocidad relativa a la galaxia anfitriona, que

es de 1000 km s^{-1} . Como se ha señalado anteriormente, esta es una velocidad media para la mayoría de las galaxias que albergan fuentes de GWs. Estos resultados se basan en un algoritmo simplificado de análisis de datos y en formas de onda aproximadas, aunque ilustrativas. Por lo tanto, los resultados deben tomarse como representativos. Como regla general, necesitamos una desviación de $< 0,1$ para decir que tenemos una detección y $< 10^{-3}$ para la extracción de parámetros [véase por ejemplo 108, 109, 110, 111]. Aunque es preliminar, este estudio muestra que en este caso ni siquiera seríamos capaces de detectar en absoluto este tipo de sistemas, por no hablar de ninguna extracción de parámetros.

10.4. Fuentes afectadas

Mientras la señal de una fuente se encuentra dentro de la banda de frecuencias observable, las amplitudes de todos los modos cambiarán e inducirán un desplazamiento de fase creciente que aumenta a medida que la relación de masas es mayor. Este desplazamiento de fase adicional causará una gran ambigüedad en la interpretación de la fuente de ondas gravitacionales y podría incluso llevar a perder la fuente por completo, cuando no se trata adecuadamente. Además, la amplitud del haz afectará a la fuerza detectada de la onda gravitacional y, por tanto, a nuestra estimación de la distancia a la fuente [84, 85].

Estos modos superiores nos ayudan a extraer aún mejor la velocidad propia (y la aceleración, si la hay) de la fuente observada. Estos dos nuevos efectos relativistas se aplican a todo tipo de fuentes de ondas gravitacionales (desde las binarias de agujeros negros supermasivos hasta las fuentes de LIGO/Virgo, es decir, objetos compactos con masas similares a la del sol), aunque las espirales largas se encuentran entre los mejores candidatos para sondear los nuevos efectos debido al efecto acumulativo.

Para las fuentes cuyos componentes tengan una masa más similar, las señales durarán menos en la banda [112, 113, 114, 115], lo que hace más difícil extraer cualquier efecto. La colaboración LIGO/Virgo ha observado recientemente una binaria de dos objetos compactos con la relación de masas más desigual medida hasta ahora con ondas gravitacionales, de nueve [116].

Esta fuente ha sido apodada “objeto misterioso” porque parece implicar un agujero negro de masa $22,2 - 24,3 M_{\odot}$ y un objeto compacto de masa $2,50 - 2,67 M_{\odot}$, lo que lo convierte en el “agujero negro más ligero o la estrella de neutrones más pesada jamás descubierta” [116]. Esto es así porque, con 2,6 veces la masa del sol, el objeto compacto ligero supera las predicciones teóricas sobre la masa máxima de las estrellas de neutrones. Este objeto no debería existir físicamente. Pero existe. La cuestión que se plantea es si este objeto, y las futuras observaciones que se produzcan, pueden explicarse en términos de los efectos físicos que pienso estudiar y desarrollar.

Con la creciente precisión de los detectores de GWs [115, 117, 118, 119, 120, 121,

[122, 123] incluso los pequeños efectos serán importantes en el futuro. A medida que pasemos a relaciones de masa cada vez mayores, el efecto será más importante. Un objetivo especialmente importante de mi investigación son las “espirales largas”.

10.5. Implicaciones

Mi futuro trabajo nos permitirá examinar la posibilidad de que surjan nuevos efectos relacionados con la mezcla de modos; es decir, que se comprendan nuevos efectos físicos.

Además, en nuestro primer trabajo sobre el efecto del haz[90], encontramos que la rotación de la polarización afectará a la descomposición de las ondas gravitacionales y, por tanto, inducirá otros efectos en los modos. Por otra parte, encontramos indicios de que esto podría tener un efecto en la relación entre las dos polarizaciones de las ondas gravitacionales, lo que tendría un impacto directo en nuestra interpretación de la inclinación de la órbita respecto a la línea de visión, así como en otras propiedades de la fuente [124].

Aparte de la prometedora perspectiva de una nueva física gravitatoria, este estudio profundizará en los resultados que hemos encontrado hasta ahora. En el trabajo que he realizado hasta ahora, y siguiendo la filosofía de la cita, he considerado los efectos del movimiento en el espacio-tiempo plano; es decir, lejos de la fuente (lo que se denomina el “régimen de campo débil”). He basado nuestros cálculos en las transformaciones de Lorentz. Se trata de una aproximación legítima que nos permite obtener una primera visión de los efectos. Nuestro objetivo es avanzar y abordar el llamado “régimen de campo fuerte”; es decir, lo que ocurre cuando se está cerca de un agujero negro.

Este tipo de investigación probablemente conducirá a nuevos descubrimientos. En los próximos años LIGO/Virgo recogerá más datos con más objetos que tengan espirales con proporciones de masa interesantes. Estas observaciones serán malinterpretadas, o se pasarán por alto, junto con posibles nuevas fuentes, si no se tiene en cuenta la distorsión de las ondas gravitacionales debida a la aberración y el efecto de haz.

10.6. Diferentes tipos de fuentes

La mayor ventaja de los nuevos efectos que mis colaboradores y yo hemos desarrollado hasta ahora es que es independiente de la fuente concreta; es decir, no depende de la propia fuente de ondas gravitacionales [1; 7; 8] aunque, como hemos mencionado antes, las inspirales pertenecen a los candidatos favoritos. Por lo tanto, mis resultados pueden aplicarse a cualquier tipo de fuente: desde binarias de agujeros negros supermasivos hasta inspirales largas (XMRIs, EMRIs, IMRIs), pasando por binarias de agujeros negros de masa estelar y estrellas de neutrones que han sido detectadas por LIGO/Virgo [31; 33; 35; 36]. Un aspecto importante para identificar la fuente es que las propiedades particulares de ca-

da fuente pueden dar lugar a diferentes variaciones en cómo se manifestarán los efectos en sus detecciones [8]. Por ejemplo, diferentes fuentes pueden tener diferentes escalas de tiempo, lo que afectará al desplazamiento de fase aberrante [8] o diferentes amplitudes relativas de los modos subdominantes, que son cruciales para el efecto del haz [1].

Para poder aplicar nuestros resultados a la detección, primero tenemos que entender la escala temporal de las ondas gravitacionales en comparación con la escala temporal del movimiento (aceleración) y la evolución temporal de los modos subdominantes más fuertes (“tonos”) para cada posible fuente objetivo. Es especialmente importante comprender el papel que desempeñan los parámetros intrínsecos de las fuentes para las propiedades mencionadas y si (y cómo) pueden llevar a una posible confusión con los efectos inducidos por el movimiento. Además, el movimiento de la fuente puede verse afectado por el entorno. Esto se debe a que la binaria no está perfectamente aislada en el vacío. Podría haber aspectos astrofísicos como una estrella cercana perturbadora [125], pero también la presencia de gas como un disco de acreción, o incluso la posibilidad de una acreción de materia oscura [126].

Por lo tanto, es esencial entender qué efectos, además del movimiento, pueden ser inducidos por el entorno y qué relevancia tienen respecto a él. Para lograrlo, hay que:

- (1) comparar la teoría que mi grupo y yo hemos desarrollado y los resultados futuros con otros modelos teóricos que suponen que la fuente está en reposo [véase 127, 128, para un resumen de los modelos],
- (2) examinar los modelos existentes y futuros de todas las fuentes objetivo para las características más relevantes [129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137], e
- (3) investigar el número constantemente creciente de detecciones de LIGO/Virgo (véase la sección anterior, así como los riesgos allí mencionados, y las referencias [112, 113, 114]).

Una vez que tengamos una clara comprensión de estos puntos, podremos seleccionar las fuentes más interesantes y sus características más notables para aplicar las herramientas necesarias para la correcta detección del movimiento de las fuentes de ondas gravitacionales.

10.7. Efectos relativistas generales

Hasta ahora, como hemos visto, hemos descrito dos nuevos efectos relativistas para las ondas gravitacionales: el efecto de haz y el desfase aberracional[89, 90].

Sin embargo, es posible que haya otros efectos inducidos por el movimiento y es probable que este tipo de investigación conduzca a otros descubrimientos relacionados con la velocidad. Por lo tanto, tenemos que ir a un orden superior.

Por ejemplo, para el efecto de haz sólo he considerado sus efectos en los modos hasta el orden lineal en la velocidad. Si descomponemos las GW en modos superiores utilizando armónicos esféricos de espín 2 y pasamos a órdenes superiores en la velocidad, es probable que aparezcan nuevos efectos relacionados con la mezcla de modos [92, 93, 94].

Es importante mencionar que la rotación de la polarización afecta a la mencionada descomposición de los GWs mediante armónicos esféricos de espín-2, como encontré en el primer artículo sobre el haz de luz [90]. Esto induciría otros efectos en los modos de las GWs, o también podría llevar a un efecto en la relación entre la polarización positiva y la cruzada de los GWs. Esto, a su vez, afectaría a nuestra interpretación de la inclinación de la órbita respecto a la línea de visión, pero también a otras propiedades de la fuente [124].

En este sentido, podemos considerar la exposición anterior como un riesgo, porque no está garantizado que mis hipótesis sean correctas hasta que lo comprobemos. Por otra parte, incluso en la improbable situación de que no se encuentren nuevos efectos, hay mucho esfuerzo por delante: en los tres trabajos mencionados, mis colaboradores y yo sólo hemos considerado los efectos del movimiento en el espacio-tiempo plano lejos de la fuente (régimen de campo débil) y hemos basado nuestros cálculos en las transformaciones de Lorentz. Esta es una aproximación perfectamente legítima que permite obtener una primera visión de los efectos, pero no describe la totalidad de la situación. Es indispensable llevar a cabo una generalización del trabajo en el espacio curvo, cerca de la fuente, el agujero negro, en el llamado régimen de campo fuerte.

En la relatividad general no existen generalizaciones de las transformaciones de Lorentz. En este sentido, las transformaciones de Bondi-Metzner-Sachs [138] son una buena aproximación necesaria para los objetivos del estudio, ya que pueden considerarse como una transformación de Lorentz que es válida para espacios-tiempo curvos pero que requiere que el espacio-tiempo se vuelva plano en el infinito.

Esta es la única restricción de estas transformaciones, es decir, no necesitamos imponer ninguna restricción a la propia fuente. Este es exactamente el caso que nos interesa: Las ondas gravitacionales producidas por un sistema que curva significativamente el espacio-tiempo (agujeros negros y objetos compactos) que se vuelve plano en el infinito. De hecho, estas transformaciones han sido elegidas y utilizadas en la literatura precisamente por esta razón para, por ejemplo, interpretar simulaciones numéricas de relatividad general. Más concretamente, para extraer la reculada relativista generada en el marco de referencia de dos agujeros negros que se fusionan, tal y como se observa en el infinito; es decir, en la tierra a través de la detección de sus ondas gravitacionales [139].

Esto es fundamental, porque el uso de las transformaciones de Lorentz es sólo una aproximación de primer orden. Para desvelar la verdadera naturaleza del espaciotiempo hay que buscar y comprender las transformaciones subyacentes de orden superior. Por ello, estudiaremos estos efectos generalizando la teoría del mismo modo que la relatividad pasó de especial a general.

Comprender el desplazamiento de fase de los haces y de las aberraciones, así como los posibles nuevos efectos al extender mi teoría al régimen de campo fuerte, no es sólo importante para la detección de las ondas gravitacionales. Es importante asegurarse de que entendemos todos los efectos que pueden surgir en el contexto ortodoxo de la relatividad general antes de que podamos ir a las teorías de la gravitación que pretenden extenderse más allá de ella [por ejemplo, véase el trabajo 140].

Comprender el efecto del haz y la aberración sobre el desplazamiento de fase y otros parámetros en el régimen de campo fuerte no sólo es fundamental para la correcta detección de las ondas gravitacionales. Es crucial para asegurar que entendemos los efectos adicionales que pueden surgir en el contexto de la relatividad general. Por lo tanto, este es uno de los principales objetivos de esta investigación. El objetivo es llegar al régimen fuerte, es decir, acercarnos cada vez más al agujero negro paso a paso en este empeño. En este sentido, este trabajo posiblemente sacará a la luz nuevos aspectos de las ondas gravitacionales cerca de la fuente, lo que quizá nos ayude a comprender mejor, aunque sea un ϵ , la pregunta latente de este y de muchos más trabajos en relatividad: ¿Qué es la gravedad?

10.8. Modelización de nuestra teoría y comprobación con datos

En física, los experimentos siempre tienen la última palabra. Por lo tanto, es imperativo implementar nuestros resultados en los patrones de detección de ondas gravitacionales existentes, las formas de onda, con el fin de realizar pruebas.

Dado que nuestro estudio es analítico, debería ser bastante sencillo implementar los nuevos efectos físicos en los modelos de ondas existentes. Como ya se ha explicado, estos efectos físicos se aplican a todas las fuentes de ondas gravitacionales. Pero como las espirales describen miles y hasta cientos de miles de revoluciones (e incluso hasta cientos de millones, en el caso de las XMRI, como demostré, [141]) en torno al agujero negro masivo antes de cruzar el horizonte de sucesos, los efectos de aberración y de haz son especialmente relevantes.

Aunque la velocidad relativa a la galaxia anfitriona es constante, el efecto se acumula como en el caso de la precesión del pericentro de Mercurio. Se acumulan de forma secular y tienen un impacto importante en la detección de la onda gravitacional, como la fase. Ésta varía del valor que habría tenido si estos dos efectos no hubieran estado presentes.

Esto se debe a la diferencia de masa: Cuanto mayor sea la relación de masas, más ciclos y, por tanto, más importante será el desplazamiento de fase y más importante será la diferencia en las polarizaciones.

Las espirales representan uno de los principales objetivos científicos de la misión LISA

de la ESA/NASA, que se lanzará dentro de unos trece años², así como el caso científico, presentado en mis trabajos [106, 142, 143]).

El siguiente hito importante es que LISA está previsto que sea adoptado por la ESA en 2024: este es el punto formal en el que el CPE acuerda seguir adelante con la misión tal y como está diseñada, y donde se colocan los grandes contratos industriales. Por otra parte, soy miembro del Telescopio Einstein (ET) y de su equipo científico [144], que también se encargará de observar los inspirales, en particular los IMRI. Este instrumento se encuentra en la fase inicial de estudio de diseño, y los parámetros básicos están siendo establecidos³.

Afortunadamente, no necesitamos esperar hasta la construcción de LISA o del ET. Recientemente he demostrado que las inspiraciones de objetos compactos sobre agujeros negros masivos en el rango de masa intermedia, IMRIs, deberían estar ya presentes en los datos actuales de LIGO/Virgo basados en tierra [145].

Sin embargo, desde el punto de vista del análisis de datos, la detección de estas relaciones de masa intermedia es una tarea muy difícil y representa, de nuevo, un punto arriesgado: no tenemos una certeza del 100 % de que LIGO/Virgo vaya a poder detectar un IMRI.

Sin embargo, cabe decir que la colaboración LIGO/Virgo seguirá en cualquier caso detectando fuentes con una relación de masas importante, de 9, como el "objeto misterioso" presentado en [116]. El hecho de que ya hayamos medido uno y de que LIGO y Virgo se actualicen pronto es una indicio de que se detectarán más fuentes con este tipo de relación de masas y muy probablemente estarán en condiciones de detectar relaciones de masas cada vez mayores en el futuro próximo, a medida que mejore la sensibilidad de los detectores [96, 117, 118].

Empezaremos con la aproximación más sencilla posible, antes de ir añadiendo grados de complejidad, paso a paso. Es decir, partiremos de una aproximación newtoniana, cuadrupolar, y luego avanzaremos hacia formas de onda post-newtonianas e híbridas calibradas con relatividad numérica [112, 113, 114, 129, 135, 136, 137]. Afortunadamente, estas complejas formas de onda están disponibles para su uso público, así como los datos reales con los que realizar las pruebas⁴.

Es importante señalar que no pretendo desarrollar nuevas familias de formas de onda que, para las espirales con proporción de masas intermedias son un verdadero reto, sino adaptar lo que ya está disponible a nuestras necesidades. En el caso de las relaciones de masa pequeñas, estas formas de onda ya existen. Para las relaciones de masa extremas, utilizaremos formas de onda aproximadas como la suite kludge, que forma parte del Black Hole Perturbation Toolkit⁵. En cuanto a las espirales con proporción de masas extremadamente grandes, como expliqué en mi trabajo de [141], una geodésica es ya una aproxima-

²<https://sci.esa.int/web/lisa/-/61366-science-objectives>

³<http://www.et-gw.eu/index.php/etdsdocument>

⁴<https://www.gw-openscience.org>

⁵<https://bhptoolkit.org/>

ción suficientemente buena.

A partir de estas comparaciones podremos desarrollar criterios para identificar las señales inducidas por los nuevos efectos físicos que hemos descubierto, así como aprender a extraer información sobre la velocidad de la fuente de ondas gravitacionales y su sistema anfitrión. Un segundo objetivo importante es implementar los nuevos efectos físicos en las plantillas de formas de onda que se utilizan en la búsqueda activa de fuentes con los detectores actuales. Dado que nuestra teoría es analítica, podemos modificar las formas de onda para rectificarlas y lograr una detección correcta. Los nuevos efectos que hemos descrito provocan distorsiones en la detección de las fuentes que podrían ser malinterpretadas e identificados como objetos “misteriosos” que no siguen las reglas de la física. Además, al hacerlo, extraeremos con gran precisión el movimiento de las galaxias hasta distancias inigualables, ya que éste es el factor responsable de la distorsión en primer lugar.

10.9. Tomografía de cúmulos de galaxias y materia oscura

Este estudio tiene un impacto que se extiende más allá de la naturaleza del espacio-tiempo.

Al comprender los efectos físicos de orden superior, podemos derivar con un pequeño error la velocidad peculiar de la galaxia anfitriona que contiene la fuente de ondas gravitacionales. Podemos considerar esta velocidad peculiar como representativa del cúmulo de galaxias donde se encuentra la galaxia. Es decir, podemos hacer una especie de proceso de reversión de información para obtener información astrofísica.

Si suponemos que este cúmulo de galaxias está virializado, podemos derivar una tomografía de los cúmulos galácticos y de la distribución de la materia oscura a distancias muy grandes, fuera del alcance de la luz. En el trabajo que hemos hecho hasta ahora, mis colaboradores y yo demostramos que las componentes radial y tangencial de la velocidad pueden extraerse de forma independiente. Esto tiene un gran impacto en la astronomía y la cosmología observacional.

Potencialmente, podríamos utilizar los seguimientos con telescopios electromagnéticos de las fuentes de kilo-novas de LIGO/Virgo para obtener una medida independiente de la velocidad. Los cúmulos de galaxias ricos existen bien dentro del límite en el que se buscan activamente contrapartidas electromagnéticas, de unos 300 Mpc. Con la futura mejora de la sensibilidad de LIGO y Virgo, esperamos observar más contrapartes electromagnéticas. Un riesgo obvio, por supuesto, es si tales contrapartidas serán observadas en absoluto. Sin embargo, dado que ya se han detectado, es lógico que otros sigan en el futuro. También, Dado que no se trata de un objetivo específico de este estudio, sino de una posible aplicación futura a elaborar por nosotros o por la comunidad, consideramos que no es un riesgo, per se, de los objetivos reales de la propuesta.

En la figura 10.2, la barra vertical en torno a 300 Mpc corresponde al límite típico de

las campañas de observación ópticas que buscan kilonovas. Una fracción significativa de las kilonovas observables (la contrapartida electromagnética típica de las fuentes de LIGO/Virgo⁶) debe estar alojada en cúmulos de galaxias ricos y, por tanto, sus ondas gravitacionales asociadas se ven afectadas por nuestros nuevos efectos relativistas.

Como se ha mencionado, con la incierta condición de que haya más sucesos de ondas gravitacionales seguidos de tales kilonovas, estaríamos en principio en condiciones de utilizar las velocidades derivadas de los datos espectroscópicos de las galaxias anfitrionas. Así, teniendo en cuenta la precisión de localización de LISA, podríamos medir las dispersiones de velocidad de los cúmulos de galaxias individuales. Éstas, a su vez, pueden indicarnos la masa del halo anfitrión si se supone que la materia de su interior está virializada: Adoptando la cosmología Λ CDM y un formalismo Press-Schechter, podemos utilizar estas mediciones para estimar las masas de halos distantes hasta al menos un desplazamiento al rojo 20, como puede alcanzar LISA con relaciones señal-ruido muy altas [106].

Mis colaboradores y yo hemos demostrado que se pueden extraer de forma independiente las componentes radial y tangencial de la velocidad de la galaxia anfitriona. Una posible aplicación futura de este trabajo es, por lo tanto, obtener una tomografía precisa de los cúmulos galácticos y de la distribución de la materia oscura a distancias muy grandes, hasta un desplazamiento al rojo de, 20 por ejemplo, unos 23000 millones de pc o 750 mil millones de años-luz y más allá.

En este sentido, este estudio tendrá un impacto que va más allá de la relatividad general, la física de las ondas gravitacionales; seguirá siendo desarrollado por nosotros o por la comunidad en el futuro como una herramienta para la astrofísica, porque nos proporcionará datos inaccesibles a la luz.

⁶Véase <https://kilonova.org> para un resumen de todas las numerosas publicaciones

CAPÍTULO

11

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIBLIOGRAFÍA

- [1] B. S. Bloom and D. R. Krathwohl. Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals, by a committee of college and university examiners. Handbook I: Cognitive Domain. *Longmans, NY*, 1956.
- [2] L. W. Anderson, D. R. Krathwohl, P. W. Airasian, R. Cruikshank, E. Mayer, P. R. Pintrich, J. Rath, and M. C. Wittrock. A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing. *Ed. Longmans, NY*, 2001.
- [3] R. J. Marzano and J. S. Kendall. The new taxonomy of educational objectives. *Ed. Corwin Press*, 2007.
- [4] J. Alcoba González. La clasificación de los métodos de enseñanza en educación superior. *Contextos Educativos 15*, 2012.
- [5] M. Rodríguez Sánchez. Metodologías docentes en el EEES: de la clase. *Tendencias pedagógicas*, 2011.
- [6] A. Fernández March. Metodologías activas para la formación de competencias. *Educación Siglo XXI*, 2006.
- [7] E. Aronson. The Jigsaw Classroom. *Oxford, England: Sage*, 1978.
- [8] R. Santiago and J. Bergmann. Flipped Classroom 3.0 y metodologías activas en el aula. *Editorial Paidós*, 2018.
- [9] M. A. De la Cruz Tomé. El proceso de convergencia europea: ocasión de modernizar la universidad española si se produce un cambio de mentalidad en gestores, profesores y estudiantes. *Aula Abierta 82*, 2003.
- [10] P. Hernández. Diseñar y enseñar. *Ed. Narcea, Madrid*, 1989.
- [11] G. Brown and M. Atkins. Effective Teaching in Higher Education. *Methue & Ltd. London*, 1988.
- [12] O. Mas Torelló. El profesor universitario: sus competencias y formación. *Profesorado: Revista de curriculum y formación del profesorado*, 2011.
- [13] A. S. Eddington. *Observatory*, 58:37, 1935.
- [14] Gravity Collaboration. Detection of orbital motions near the last stable circular orbit of the massive black hole SgrA*. *A&A*, 618:L10, October 2018.
- [15] Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *ApJ Lett.*, 875(1):L1, April 2019.
- [16] A. DeBenedictis. *Developments in Black Hole*

- Research: Classical, Semi-classical, and Quantum, page 548. 12 2007.
- [17] CC BY-SA 3.0 Dr. Greg. [URL](#).
- [18] CC BY-SA 4.0 AkanoToE. [URL](#).
- [19] E. P. Tito and V. I. Pavlov. Relativistic motion of stars near rotating black holes. *Galaxies*, 6(2), 2018.
- [20] Claudio Rocchini Derivative work Pbroks13. [URL](#).
- [21] G.S. Hall. *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*. Lecture Notes in Physics Series. World Scientific, 2004.
- [22] Silly rabbit. [URL](#).
- [23] Werner Israel. Event horizons in static vacuum space-times. *Phys. Rev.*, 164:1776–1779, Dec 1967.
- [24] S.W. Hawking and W. Israel. *Three Hundred Years of Gravitation*. Philosophiae Naturalis, Principia Mathematica. Cambridge University Press, 1989.
- [25] Werner Israel. Event horizons in static electrovac space-times. *Communications in Mathematical Physics*, 8(3):245–260, September 1968.
- [26] Remo Ruffini and John A. Wheeler. Introducing the black hole. *Physics Today*, 24(1):30, January 1971.
- [27] Roger Penrose. Gravitational Collapse: the Role of General Relativity. *Nuovo Cimento Rivista Serie*, 1:252, January 1969.
- [28] H. T. Cromartie, E. Fonseca, S. M. Ransom, P. B. Demorest, Z. Arzoumanian, H. Blumer, P. R. Brook, M. E. DeCesar, T. Dolch, J. A. Ellis, R. D. Ferdman, E. C. Ferrara, N. Garver-Daniels, P. A. Gentile, M. L. Jones, M. T. Lam, D. R. Lorimer, R. S. Lynch, M. A. McLaughlin, C. Ng, D. J. Nice, T. T. Pennucci, R. Spiewak, I. H. Stairs, K. Stovall, J. K. Swiggum, and W. W. Zhu. Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. *Nature Astronomy*, 4:72–76, January 2020.
- [29] A. Patruno. [URL](#).
- [30] Elizabeth Gibney. Neutron stars set to open their heavy hearts. *Nature*, 546(7656):18, June 2017.
- [31] Feryal Özel, Dimitrios Psaltis, Tolga Güver, Gordon Baym, Craig Heinke, and Sebastien Guillot. The Dense Matter Equation of State from Neutron Star Radius and Mass Measurements. *ApJ*, 820(1):28, March 2016.
- [32] S. Ransom. [URL](#).
- [33] P. Kaaret, Z. Prieskorn, J. J. M. in 't Zand, S. Brandt, N. Lund, S. Mereghetti, D. Götz, E. Kuulkers, and J. A. Tomsick. Evidence of 1122 hz x-ray burst oscillations from the neutron star x-ray transient xte j1739-285. *The Astrophysical Journal*, 657(2):L97–L100, Feb 2007.
- [34] Leandro Althaus, J. Panei, Alejandra Romero, René Rohrmann, Alejandro Córscico, Enrique García-Berro, and Marcelo Miller Bertolami. Evolution and colors of helium-core white dwarf stars with high-metallicity progenitors. *Astronomy and Astrophysics*, 502, 05 2009.
- [35] J. P. Luminet. Image of a spherical black hole with thin accretion disk. *A&A*, 75:228–235, May 1979.
- [36] L. Pavan, E. Bozzo, G. Pühlhofer, C. Ferrigno, M. Balbo, and R. Walter. IGR J11014-6103: a newly discovered pulsar wind nebula? *A&A*, 533:A74, September 2011.
- [37] L. Ferrarese and H. Ford. Supermassive Black Holes in Galactic Nuclei: Past, Present and Future Research, February 2005.
- [38] J. Kormendy. The Stellar-Dynamical Search for Supermassive Black Holes in Galactic Nuclei. In L. Ho, editor, *Coevolution of Black Holes and Galaxies, from the Carnegie Observatories Centennial Symposia*, page 1. Cambridge University Press, 2004.
- [39] K. Gültekin, D. O. Richstone, K. Gebhardt, T. R. Lauer, S. Tremaine, M. C. Aller, R. Bender, A. Dressler, S. M. Faber, A. V. Filippenko, R. Green, L. C. Ho, J. Kormendy, J. Magorrian, J. Pinkney, and C. Siopis. The M- σ and M-L Relations in Galactic Bulges, and Determinations of Their Intrinsic Scatter. *ApJ*, 698:198–221, June 2009.
- [40] J. Kormendy and L. C. Ho. Coevolution (Or Not) of Supermassive Black Holes and Host Galaxies. *ARA&A*, 51:511–653, August 2013.
- [41] R. Schödel, T. Ott, R. Genzel, A. Eckart, N. Mouawad, and T. Alexander. Stellar Dynamics in the Central Arcsecond of Our Galaxy. *ApJ*, 596:1015–1034, October 2003.
- [42] A. M. Ghez, G. Duchêne, K. Matthews, S. D. Hornstein, A. Tanner, J. Larkin, M. Morris, E. E. Becklin, S. Salim, T. Kremenek, D. Thompson, B. T. Soifer, G. Neugebauer, and I. McLean. The First Measurement of Spectral Lines in a Short-

- Period Star Bound to the Galaxy's Central Black Hole: A Paradox of Youth. *ApJ Lett.*, 586:L127–L131, April 2003.
- [43] R. Genzel, F. Eisenhauer, and S. Gillessen. The Galactic Center massive black hole and nuclear star cluster. *Reviews of Modern Physics*, 82:3121–3195, October 2010.
- [44] A. Soltan. Masses of quasars. *MNRAS*, 200:115–122, July 1982.
- [45] Q. Yu and S. Tremaine. Observational constraints on growth of massive black holes. *MNRAS*, 335:965–976, October 2002.
- [46] K. Gebhardt, R. M. Rich, and L. C. Ho. A 20000 $M_{\odot}$ Black Hole in the Stellar Cluster G1. *ApJ Lett.*, 578:41–45, October 2002.
- [47] J. Gerssen, R. P. van der Marel, K. Gebhardt, P. Guhathakurta, R. C. Peterson, and C. Pryor. Hubble Space Telescope Evidence for an Intermediate-Mass Black Hole in the Globular Cluster M15. II. Kinematic Analysis and Dynamical Modeling. *AJ*, 124:3270–3288, December 2002.
- [48] M. C. Miller and E. J. M. Colbert. Intermediate-Mass Black Holes. *International Journal of Modern Physics D*, 13:1–64, January 2004.
- [49] A. K. H. Kong, C. O. Heinke, R. Di Stefano, P. Barmby, W. H. G. Lewin, and F. A. Primini. X-Ray Localization of the Intermediate-Mass Black Hole in the Globular Cluster G1 with Chandra. *ArXiv e-prints*, October 2009.
- [50] E. S. Phinney. Manifestations of a Massive Black Hole in the Galactic Center. In M. Morris, editor, *The Center of the Galaxy*, volume 136 of *IAU Symposium*, page 543, 1989.
- [51] J. Magorrian and S. Tremaine. Rates of tidal disruption of stars by massive central black holes. *MNRAS*, 309:447–460, October 1999.
- [52] D. Syer and A. Ulmer. Tidal disruption rates of stars in observed galaxies. *MNRAS*, 306:35–42, June 1999.
- [53] J. G. Hills. Possible power source of Seyfert galaxies and QSOs. *Nat*, 254:295–298, March 1975.
- [54] M. J. Rees. Tidal disruption of stars by black holes of 10 to the 6th–10 to the 8th solar masses in nearby galaxies. *Nat*, 333:523–528, June 1988.
- [55] G. D. Quinlan and S. L. Shapiro. The dynamical evolution of dense star clusters in galactic nuclei. *ApJ*, 356:483–500, June 1990.
- [56] S. F. Portegies Zwart, H. Baumgardt, S. L. W. McMillan, J. Makino, P. Hut, and T. Ebisuzaki. The Ecology of Star Clusters and Intermediate-Mass Black Holes in the Galactic Bulge. *ApJ*, 641:319–326, April 2006.
- [57] J. P. Ostriker. Collisional Dark Matter and the Origin of Massive Black Holes. *Physical Review Letters*, 84:5258–5260, June 2000.
- [58] T. Hara. Evolution of a super-massive star in a dense stellar system. *Progress of Th. Phys.*, 60:711–723, 1978.
- [59] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. Gravitational collapse of supermassive stars to black holes - Numerical solution of the Einstein equations. *ApJ Lett.*, 234:L177–L181, December 1979.
- [60] M. J. Rees. "black hole models for active galactic nuclei". *ARA&A*, 22:471–506, 1984.
- [61] M. C. Begelman. Evolution of supermassive stars as a pathway to black hole formation. *MNRAS*, 402:673–681, February 2010.
- [62] R. Schödel, A. Feldmeier, N. Neumayer, L. Meyer, and S. Yelda. The nuclear cluster of the Milky Way: our primary testbed for the interaction of a dense star cluster with a massive black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 31(24):244007, December 2014.
- [63] L. Brenneman. *Measuring the Angular Momentum of Supermassive Black Holes*. 2013.
- [64] C. S. Reynolds. Measuring Black Hole Spin Using X-Ray Reflection Spectroscopy. *Space Science Reviews*, 183:277–294, September 2014.
- [65] I. Khabibullin, S. Sazonov, and R. Sunyaev. SRG/eROSITA prospects for the detection of stellar tidal disruption flares. *MNRAS*, 437:327–337, January 2014.
- [66] K. Nandra, D. Barret, X. Barcons, A. Fabian, J.-W. den Herder, L. Piro, M. Watson, C. Adami, J. Aird, J. M. Afonso, and et al. The Hot and Energetic Universe: A White Paper presenting the science theme motivating the Athena+ mission. *ArXiv e-prints*, June 2013.
- [67] J. Frank and M. J. Rees. Effects of massive central black holes on dense stellar systems. *MNRAS*, 176:633–647, September 1976.
- [68] A. P. Lightman and S. L. Shapiro. The distribution and consumption rate of stars around a massive, collapsed object. *ApJ*, 211:244–262, January 1977.

- [69] P. Amaro-Seoane and R. Spurzem. The loss-cone problem in dense nuclei. *MNRAS*, 327:995–1003, November 2001.
- [70] J. Wang and D. Merritt. Revised Rates of Stellar Disruption in Galactic Nuclei. *ApJ*, 600:149–161, January 2004.
- [71] L. P. David, R. H. Durisen, and H. N. Cohn. The evolution of active galactic nuclei. I - models without stellar evolution. *ApJ*, 313:556–575, February 1987.
- [72] L. P. David, R. H. Durisen, and H. N. Cohn. The evolution of active galactic nuclei. II - models with stellar evolution. *ApJ*, 316:505–516, May 1987.
- [73] B. W. Murphy, H. N. Cohn, and R. H. Durisen. Dynamical and luminosity evolution of active galactic nuclei - models with a mass spectrum. *ApJ*, 370:60–77, March 1991.
- [74] M. Freitag and W. Benz. A new monte carlo code for star cluster simulations: II. central black hole and stellar collisions. *A&A*, 394:345–374, October 2002.
- [75] H. Baumgardt, J. Makino, and T. Ebisuzaki. Massive Black Holes in Star Clusters. II. Realistic Cluster Models. *ApJ*, 613:1143–1156, October 2004.
- [76] P. Amaro-Seoane, M. Freitag, and R. Spurzem. Accretion of stars on to a massive black hole: A realistic diffusion model and numerical studies. *MNRAS*, January 2004.
- [77] H. Baumgardt, J. Makino, and T. Ebisuzaki. Massive Black Holes in Star Clusters. I. Equal-Mass Clusters. *ApJ*, 613:1133–1142, October 2004.
- [78] D. Merritt and E. Vasiliev. Orbits Around Black Holes in Triaxial Nuclei. *ApJ*, 726:61, January 2011.
- [79] E. Vasiliev and D. Merritt. The Loss-cone Problem in Axisymmetric Nuclei. *ApJ*, 774:87, September 2013.
- [80] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, and et al. Astrophysical Implications of the Binary Black Hole Merger GW150914. *ApJ Lett.*, 818:L22, February 2016.
- [81] P. Amaro-Seoane and X. Chen. Relativistic mergers of black hole binaries have large, similar masses, low spins and are circular. *MNRAS*, 458:3075–3082, May 2016.
- [82] P. Amaro-Seoane. Relativistic dynamics and extreme mass ratio inspirals. *Living Reviews in Relativity*, 21:4, May 2018.
- [83] P. Amaro-Seoane, A. Torres-Orjuela, M. J. B. Rosell, Z. Xuan, A. Chua, and X. Chen. Exciting higher modes in the inspiral and merger of compact objects due to the beaming effect of gravitational waves and impact on the systematics of detection. *To be submitted to Phys. Rev. Letts.*, 2020.
- [84] Alejandro Torres-Orjuela, Xian Chen, and Pau Amaro-Seoane. Phase shift of gravitational waves induced by aberration. *Ph. Rv. D*, 101(8):083028, April 2020.
- [85] Alejandro Torres-Orjuela, Xian Chen, Zhoujian Cao, Pau Amaro-Seoane, and Peng Peng. Detecting the beaming effect of gravitational waves. *Ph. Rv. D*, 100(6):063012, September 2019.
- [86] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Princeton University Press, San Francisco, CA, 2017.
- [87] B. F. Schutz. Determining the Hubble constant from gravitational wave observations. *Nature*, 323:310, September 1986.
- [88] X. Chen, S. Li, and Z. Cao. Mass-redshift Degeneracy for Gravitational-wave Sources in the Vicinity of a Supermassive Black Hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 485(1):L141–L145, Apr 2019.
- [89] Alejandro Torres-Orjuela, Xian Chen, Zhoujian Cao, Pau Amaro-Seoane, and Peng Peng. Detecting the beaming effect of gravitational waves. *Phys. Rev. D*, 100(6):063012, Sep 2019.
- [90] Alejandro Torres-Orjuela, Xian Chen, and Pau Amaro-Seoane. Phase shift of gravitational waves induced by aberration. *Phys. Rev. D*, 101(8):083028, April 2020.
- [91] D. Lynden-Bell and R. Wood. The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems. *MNRAS*, 138:495, 1968.
- [92] Milton Ruiz, Miguel Alcubierre, Darío Núñez, and Ryoji Takahashi. Multipole expansions for energy and momenta carried by gravitational waves. *General Relativity and Gravitation*, 40(11):2467–2467, November 2008.
- [93] Kip S. Thorne. Multipole expansions of gravitational radiation. *Rev. Mod. Phys.*, 52:299–339, Apr 1980.

- [94] J. N. Goldberg, A. J. Macfarlane, E. T. Newman, F. Rohrlich, and E. C. G. Sudarshan. Spin-s Spherical Harmonics and δ . *Journal of Mathematical Physics*, 8(11):2155–2161, November 1967.
- [95] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, NY, 3rd ed. edition, 1999.
- [96] John Miller, Lisa Barsotti, Salvatore Vitale, Peter Fritschel, Matthew Evans, and Daniel Sigg. Prospects for doubling the range of Advanced LIGO. *Ph. Rv. D*, 91(6):062005, March 2015.
- [97] Morag I. Scrimgeour, Tamara M. Davis, Chris Blake, Lister Staveley-Smith, Christina Magoulas, Christopher M. Springob, Florian Beutler, Matthew Colless, Andrew Johnson, D. Heath Jones, Jun Koda, John R. Lucey, Yin-Zhe Ma, Jeremy Mould, and Gregory B. Poole. The 6dF Galaxy Survey: bulk flows on 50–70 h⁻¹ Mpc scales. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 455(1):386–401, 11 2015.
- [98] Jacques Colin, Roya Mohayaee, Mohamed Rammeez, and Subir Sarkar. High-redshift radio galaxies and divergence from the CMB dipole. *MNRAS*, 471(1):1045–1055, October 2017.
- [99] Neta A. Bahcall. Large-scale structure in the universe indicated by galaxy clusters. *ARA&A*, 26:631–686, January 1988.
- [100] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, January 1933.
- [101] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton University Press, 2008.
- [102] Xian Chen, Pau Amaro-Seoane, and Jorge Cuadra. Stability of Gas Clouds in Galactic Nuclei: An Extended Virial Theorem. *ApJ*, 819(2):138, March 2016.
- [103] M. Girardi, D. Fadda, G. Giuricin, F. Mardirossian, M. Mezzetti, and A. Biviano. Velocity Dispersions and X-Ray Temperatures of Galaxy Clusters. *ApJ*, 457:61, January 1996.
- [104] J. Ruel, G. Bazin, M. Bayliss, M. Brodwin, R. J. Foley, B. Stalder, K. A. Aird, R. Armstrong, M. L. N. Ashby, M. Bautz, B. A. Benson, L. E. Bleem, S. Bocquet, J. E. Carlstrom, C. L. Chang, S. C. Chapman, H. M. Cho, A. Clocchiatti, T. M. Crawford, A. T. Crites, T. de Haan, S. Desai, M. A. Dobbs, J. P. Dudley, W. R. Forman, E. M. George, M. D. Gladders, A. H. Gonzalez, N. W. Halverson, N. L. Harrington, F. W. High, G. P. Holder, W. L. Holzapfel, J. D. Hrubes, C. Jones, M. Joy, R. Keisler, L. Knox, A. T. Lee, E. M. Leitch, J. Liu, M. Lueker, D. Luong-Van, A. Mantz, D. P. Marro-ne, M. McDonald, J. J. McMahon, J. Mehl, S. S. Meyer, L. Mocanu, J. J. Mohr, T. E. Montroy, S. S. Murray, T. Natoli, D. Nurgaliev, S. Padin, T. Plagge, C. Pryke, C. L. Reichardt, A. Rest, J. E. Ruhl, B. R. Saliwanchik, A. Saro, J. T. Sayre, K. K. Schaffer, L. Shaw, E. Shirokoff, J. Song, R. Šuhada, H. G. Spieler, S. A. Stanford, Z. Staniszewski, A. A. Starsk, K. Story, C. W. Stubbs, A. van Engelen, K. Vanderlinde, J. D. Vieira, A. Vikhlinin, R. Williamson, O. Zahn, and A. Zenteno. Optical Spectroscopy and Velocity Dispersions of Galaxy Clusters from the SPT-SZ Survey. *ApJ*, 792(1):45, September 2014.
- [105] Enrico Barausse, Alessandra Buonanno, Scott A. Hughes, Gaurav Khanna, Stephen O’Sullivan, and Yi Pan. Modeling multipolar gravitational-wave emission from small mass-ratio mergers. *Ph. Rv. D*, 85(2):024046, January 2012.
- [106] P. Amaro-Seoane, H. Audley, S. Babak, J. Baker, E. Barausse, P. Bender, E. Berti, P. Binetruy, M. Born, D. Bortoluzzi, J. Camp, C. Caprini, V. Cardoso, M. Colpi, J. Conklin, N. Cornish, C. Cutler, K. Danzmann, R. Dolesi, L. Ferraioli, V. Ferroni, E. Fitzsimons, J. Gair, L. Gesa Bote, D. Giardini, F. Gibert, C. Grimaldi, H. Halloin, G. Heinzel, T. Hertog, M. Hewitson, K. Holley-Bockelmann, D. Hollington, M. Hueller, H. Inchauspe, P. Jetzer, N. Karnesis, C. Killow, A. Klein, B. Klipstein, N. Korsakova, S. L. Larson, J. Livas, I. Lloro, N. Man, D. Mance, J. Martino, I. Mateos, K. McKenzie, S. T. McWilliams, C. Miller, G. Mueller, G. Nardini, G. Nelemans, M. Nofrarias, A. Petiteau, P. Pivato, E. Plagnol, E. Porter, J. Reiche, D. Robertson, N. Robertson, E. Rossi, G. Russano, B. Schutz, A. Sesana, D. Shoemaker, J. Slutsky, C. F. Sopuerta, T. Sumner, N. Tamanini, I. Thorpe, M. Troebs, M. Vallisneri, A. Vecchio, D. Vetrugno, S. Vitale, M. Volonteri, G. Wanner, H. Ward, P. Wass, W. Weber, J. Ziemer, and P. Zweifel. Laser Interferometer Space Antenna. *ArXiv e-prints*, February 2017.
- [107] Xian Chen and Zhe-Feng Shen. Retrieving the True Masses of Gravitational-wave Sources. *arXiv e-prints*, page arXiv:1906.11055, June 2019.
- [108] Alvin J. K. Chua, Christopher J. Moore, and Jonathan R. Gair. Augmented kludge wave-

- forms for detecting extreme-mass-ratio inspirals. *Phys. Rev. D*, 96(4):044005, August 2017.
- [109] Alvin J. K. Chua, Michael L. Katz, Niels Warburton, and Scott A. Hughes. Rapid generation of fully relativistic extreme-mass-ratio-inspiral waveform templates for LISA data analysis. *arXiv e-prints*, page arXiv:2008.06071, August 2020.
- [110] Lee Lindblom, Benjamin J. Owen, and Duncan A. Brown. Model waveform accuracy standards for gravitational wave data analysis. *Phys. Rev. D*, 78(12):124020, December 2008.
- [111] Curt Cutler and Michele Vallisneri. LISA detections of massive black hole inspirals: Parameter extraction errors due to inaccurate template waveforms. *Ph. Rv. D.*, 76(10):104018, November 2007.
- [112] The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs. *Physical Review X*, 9(3):031040, Jul 2019.
- [113] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R. X. Adhikari, V. B. Adya, and et al. GW190412: Observation of a Binary-Black-Hole Coalescence with Asymmetric Masses. *arXiv e-prints*, page arXiv:2004.08342, April 2020.
- [114] The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration. GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a $23 M_{\odot}$ Black Hole with a $2.6 M_{\odot}$ Compact Object. *arXiv e-prints*, page arXiv:2006.12611, June 2020.
- [115] P. Amaro-Seoane and et al. Laser Interferometer Space Antenna. *ArXiv e-prints*, February 2017.
- [116] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object. *ApJ Lett.*, 896(2):L44, June 2020.
- [117] LIGO Scientific Collaboration, J. Aasi, B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. R. Abernathy, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, and et al. Advanced LIGO. *Classical and Quantum Gravity*, 32(7):074001, April 2015.
- [118] T. Accadia, F. Acernese, M. Alshourbagy, P. Amico, F. Antonucci, S. Aoudia, N. Arnaud, C. Arnaud, K. G. Arun, P. Astone, and et al. Virgo: a laser interferometer to detect gravitational waves. *Journal of Instrumentation*, 7:3012, March 2012.
- [119] M. Punturo and et al. The Einstein Telescope: a third-generation gravitational wave observatory. *Classical and Quantum Gravity*, 27(19):194002, Oct 2010.
- [120] David Reitze, Rana X. Adhikari, Stefan Ballmer, Barry Barish, Lisa Barsotti, GariLynn Billingsley, Duncan A. Brown, Yanbei Chen, Dennis Coyne, Robert Eisenstein, Matthew Evans, Peter Fritschel, Evan D. Hall, Albert Lazzarini, Geoffrey Lovelace, Jocelyn Read, B. S. Sathyaprakash, David Shoemaker, Joshua Smith, Calum Torrie, Salvatore Vitale, Rainer Weiss, Christopher Wipf, and Michael Zucker. Cosmic Explorer: The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO. In *Bull. Am. Astron. Soc.*, volume 51, page 35, Sep 2019.
- [121] C. Cahillane, J. Betzwieser, D. A. Brown, E. Goetz, E. D. Hall, K. Izumi, S. Kandhasamy, S. Karki, J. S. Kissel, G. Mendell, R. L. Savage, D. Tuyenbayev, A. Urban, A. Viets, M. Wade, and A. J. Weinstein. Calibration uncertainty for Advanced LIGO's first and second observing runs. *Phys. Rev. D*, 96(10):102001, November 2017.
- [122] D. Tuyenbayev, S. Karki, J. Betzwieser, C. Cahillane, E. Goetz, K. Izumi, S. Kandhasamy, J. S. Kissel, G. Mendell, M. Wade, A. J. Weinstein, and R. L. Savage. Improving LIGO calibration accuracy by tracking and compensating for slow temporal variations. *Classical and Quantum Gravity*, 34(1):015002, January 2017.
- [123] Yuki Inoue, Sadakazu Haino, Nobuyuki Kanda, Yujiro Ogawa, Toshikazu Suzuki, Takayuki Tomaru, Takahiro Yamanmoto, and Takaaki Yokozawa. Improving the absolute accuracy of the gravitational wave detectors by combining the photon pressure and gravity field calibrators. *Phys. Rev. D*, 98(2):022005, Jul 2018.
- [124] B. S. Sathyaprakash and B. F. Schutz. Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves. *Living Reviews in Relativity*, 12:2, March 2009.
- [125] P. Amaro-Seoane, P. Brem, J. Cuadra, and P. J. Armitage. The Butterfly Effect in the Extreme-

- mass Ratio Inspiral Problem. *ApJ Lett.*, 744:L20, January 2012.
- [126] Enrico Barausse, Vitor Cardoso, and Paolo Pani. Can environmental effects spoil precision gravitational-wave astrophysics? *Phys. Rev. D*, 89(10):104059, May 2014.
- [127] M. Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. Gravitational Waves. OUP Oxford, 2008.
- [128] M. Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 2: Astrophysics and Cosmology*. Gravitational Waves. Oxford University Press, 2018.
- [129] Michael Boyle, Daniel Hemberger, Dante A. B. Iozzo, Geoffrey Lovelace, Serguei Ossokine, Harald P. Pfeiffer, Mark A. Scheel, Leo C. Stein, Charles J. Woodford, Aaron B. Zimmerman, Nousha Afshari, Kevin Barkett, Jonathan Blackman, Katerina Chatziioannou, Tony Chu, Nicholas Demos, Nils Deppe, Scott E. Field, Nils L. Fischer, Evan Foley, Heather Fong, Alyssa Garcia, Matthew Giesler, Francois Hebert, Ian Hinder, Reza Katebi, Haroon Khan, Lawrence E. Kidder, Prayush Kumar, Kevin Kuper, Halston Lim, Maria Okounkova, Teresita Ramirez, Samuel Rodriguez, Hannes R. Rüter, Patricia Schmidt, Béla Szilagyi, Saul A. Teukolsky, Vijay Varma, and Marissa Walker. The SXS collaboration catalog of binary black hole simulations. *Classical and Quantum Gravity*, 36(19):195006, Oct 2019.
- [130] James Healy, Carlos O. Lousto, Jacob Lange, Richard O’Shaughnessy, Yosef Zlochower, and Manuela Campanelli. Second RIT binary black hole simulations catalog and its application to gravitational waves parameter estimation. *Phys. Rev. D*, 100(2):024021, Jul 2019.
- [131] Vijay Varma, Scott E. Field, Mark A. Scheel, Jonathan Blackman, Davide Gerosa, Leo C. Stein, Lawrence E. Kidder, and Harald P. Pfeiffer. Surrogate models for precessing binary black hole simulations with unequal masses. *Physical Review Research*, 1(3):033015, October 2019.
- [132] Jonathan Blackman, Scott E. Field, Mark A. Scheel, Chad R. Galley, Christian D. Ott, Michael Boyle, Lawrence E. Kidder, Harald P. Pfeiffer, and Béla Szilágyi. Numerical relativity waveform surrogate model for generically precessing binary black hole mergers. *Phys. Rev. D*, 96(2):024058, Jul 2017.
- [133] Karan Jani, James Healy, James A. Clark, Lio- nel London, Pablo Laguna, and Deirdre Shoemaker. Georgia tech catalog of gravitational waveforms. *Classical and Quantum Gravity*, 33(20):204001, Oct 2016.
- [134] Mark Hannam, Patricia Schmidt, Alejandro Bohé, Leïla Haegel, Sascha Husa, Frank Ohme, Geraint Pratten, and Michael Pürrer. Simple Model of Complete Precessing Black-Hole-Binary Gravitational Waveforms. *Phys. Rev. Lett.*, 113(15):151101, Oct 2014.
- [135] L. Santamaría, F. Ohme, P. Ajith, B. Brügmann, N. Dorband, M. Hannam, S. Husa, P. Mösta, D. Pollney, C. Reisswig, E. L. Robinson, J. Seiler, and B. Krishnan. Matching post-Newtonian and numerical relativity waveforms: Systematic errors and a new phenomenological model for nonprecessing black hole binaries. *Phys Rev D*, 82(6):064016–+, September 2010.
- [136] Luc Blanchet. Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries. *Living Reviews in Relativity*, 9(1):4, Jun 2006.
- [137] A. Buonanno and T. Damour. Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics. *Phys. Rev. D*, 59(8):084006, April 1999.
- [138] Francesco Alessio and Giampiero Esposito. On the structure and applications of the Bondi-Metzner-Sachs group. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15(2):1830002, January 2018.
- [139] Michael Boyle. Transformations of asymptotic gravitational-wave data. *Phys. Rev. D*, 93(8):084031, April 2016.
- [140] Enrico Barausse, Emanuele Berti, Thomas Hertzog, Scott A. Hughes, Philippe Jetzer, Paolo Pani, Thomas P. Sotiriou, Nicola Tamanini, Helvi Witek, Kent Yagi, Nicolas Yunes, T. Abdelsalhin, A. Achucarro, K. V. Aelst, N. Afshordi, S. Akcay, L. Annulli, K. G. Arun, I. Ayuso, V. Baibhav, T. Baker, H. Bantilan, T. Barreiro, C. Barrera-Hinojosa, N. Bartolo, D. Baumann, E. Belgacem, E. Bellini, N. Bellomo, I. Ben-Dayan, I. Bena, R. Benkel, E. Bergshoeffs, L. Bernard, S. Bernuzzi, D. Bertacca, M. Besancon, F. Beutler, F. Beyer, S. Bhagwat, J. Bica, S. Biondini, S. Bize, D. Blas, C. Boehmer, K. Boller, B.onga, C. Bonvin, P. Bosso, G. Bozzola, P. Brax, M. Breitbach, R. Brito, M. Bruni, B. Brügmann, H. Bulten, A. Buonanno, A. O. Burke, L. M. Burko, C. Burrage,

F. Cabral, G. Calcagni, C. Caprini, A. Cárdenas-Avendaño, M. Celoria, K. Chatziioannou, D. Chernoff, K. Clough, A. Coates, D. Comelli, G. Compère, D. Croon, D. Cruces, G. Cusin, C. Dalang, U. Danielsson, S. Das, S. Datta, J. de Boer, V. De Luca, C. De Rham, V. Desjacques, K. Destounis, F. Di Filippo, A. Dima, E. Dimastrogiovanni, S. Dolan, D. Doneva, F. Duque, R. Durrer, W. East, R. Easther, M. Elley, J. R. Ellis, R. Emparan, J. M. Ezquiaga, M. Fairbairn, S. Fairhurst, H. F. Farmer, M. R. Fasiello, V. Ferrari, P. G. Ferreira, G. Ficarra, P. Figueras, S. Fisenko, S. Foffa, N. Franchini, G. Franciolini, K. Fransen, J. Frauendiener, N. Frusciante, R. Fujita, J. Gair, A. Ganz, P. Garcia, J. Garcia-Bellido, J. Garriga, R. Geiger, C. Geng, L. Á. Gergely, C. Germani, D. Gerosa, S. B. Giddings, E. Gourgoulhon, P. Grandclement, L. Graziani, L. Gualtieri, D. Haggard, S. Haino, R. Halburd, W. B. Han, A. J. Hawken, A. Hees, I. S. Heng, J. Hennig, C. Herdeiro, S. Hervik, J. v. Holten, C. J. D. Hoyle, Y. Hu, M. Hull, T. Ikeda, M. Isi, A. Jenkins, F. Julié, E. Kajfasz, C. Kalaghatgi, N. Kaloper, M. Kamionkowski, V. Karas, S. Kastha, Z. Keresztes, L. Kidder, T. Kimpson, A. Klein, S. Klioner, K. Kokkotas, H. Kolesova, S. Kolkowitz, J. Kopp, K. Koyama, N. V. Krishnendu, J. A. V. Kroon, M. Kunz, O. Lahav, A. Landragin, R. N. Lang, C. Le Poncin-Lafitte, J. Lemos, B. Li, S. Liberati, M. Liguori, F. Lin, G. Liu, F. S. N. Lobo, R. Loll, L. Lombriser, G. Lovelace, R. P. Macedo, E. Madge, E. Maggio, M. Maggiore, S. Marassi, P. Marcoccia, C. Markakis, W. Martens, K. Martinovic, C. J. A. P. Martins, A. Maselli, S. Mastrogiovanni, S. Matarrese, A. Matas, N. E. Mavromatos, A. Mazumdar, P. D. Meerburg, E. Megias, J. Miller, J. P. Mimoso, L. Mitnacht, M. M. Montero, B. Moore, P. Martin-Moruno, I. Musco, H. Nakano, S. Nampalliwar, G. Nardini, A. Nielsen, J. Novák, N. J. Nunes, M. Okounkova, R. Oliveri, F. Oppizzi, G. Orlando, N. Oshita, G. Pappas, V. Paschalidis, H. Peiris, M. Peloso, S. Perkins, V. Pettorino, I. Pikovskii, L. Pilo, J. Podolsky, A. Pontzen, S. Prabhat, G. Pratten, T. Prokopec, M. Prouza, H. Qi, A. Racanelli, A. Rajantie, L. Randall, G. Raposo, V. Raymond, S. Renaux-Petel, A. Ricciardone, A. Riotto, T. Robson, D. Roest, R. Rollo, S. Rosofsky, J. J. Ruan, D. Rubiera-García, M. Ruiz, M. Rusu, F. Sabatie, N. Sago, M. Sakellariadou, I. D.

Saltas, L. Sberna, B. Sathyaprakash, M. Scheel, P. Schmidt, B. Schutz, P. Schwaller, L. Shao, S. L. Shapiro, D. Shoemaker, A. d. Silva, C. Simpson, C. F. Sopuerta, A. Spallicci, B. A. Stefanek, L. Stein, N. Stergioulas, M. Stott, P. Sutton, R. Svarc, H. Tagoshi, T. Tahamtan, H. Takeda, T. Tanaka, G. Tantilian, G. Tasinato, O. Tattersall, S. Teukolsky, A. L. Tiec, G. Theureau, M. Trodden, A. Tolley, A. Toubiana, D. Traykova, A. Tsoukaros, C. Unal, C. S. Unnikrishnan, E. C. Vagenas, P. Valageas, M. Vallisneri, J. Van den Brand, C. Van den Broeck, M. van de Meent, P. Vanhove, V. Varma, J. Veitch, B. Vercnocke, L. Verde, D. Vernieri, F. Vernizzi, R. Vicente, F. Vidotto, M. Visser, Z. Vlah, S. Vretinari, S. Völkel, Q. Wang, Yu-Tong Wang, M. C. Werner, J. Westernacher, R. v. d. Weygaert, D. Wiltshire, T. Wiseman, P. Wolf, K. Wu, K. Yamada, H. Yang, L. Yi, X. Yue, D. Yvon, M. Zilhão, A. Zimmerman, and M. Zumalacarregui. Prospects for Fundamental Physics with LISA. *arXiv e-prints*, page arXiv:2001.09793, January 2020.

- [141] Pau Amaro-Seoane. Extremely large mass-ratio inspirals. *Phys.Rev.D.*, 99(12):123025, Jun 2019.
- [142] P. Amaro-Seoane, S. Aoudia, S. Babak, P. Binétruy, E. Berti, A. Bohé, C. Caprini, M. Colpi, N. J. Cornish, K. Danzmann, J.-F. Dufaux, J. Gair, O. Jennrich, P. Jetzer, A. Klein, R. N. Lang, A. Lobo, T. Littenberg, S. T. McWilliams, G. Nelemans, A. Petiteau, E. K. Porter, B. F. Schutz, A. Sesana, R. Stebbins, T. Sumner, M. Vallisneri, S. Vitale, M. Volonteri, and H. Ward. Low-frequency gravitational-wave science with eLISA/NGO. *Classical and Quantum Gravity*, 29(12):124016, June 2012.
- [143] P. Amaro-Seoane, S. Aoudia, S. Babak, P. Binétruy, E. Berti, A. Bohé, C. Caprini, M. Colpi, N. J. Cornish, K. Danzmann, J.-F. Dufaux, J. Gair, I. Hinder, O. Jennrich, P. Jetzer, A. Klein, R. N. Lang, A. Lobo, T. Littenberg, S. T. McWilliams, G. Nelemans, A. Petiteau, E. K. Porter, B. F. Schutz, A. Sesana, R. Stebbins, T. Sumner, M. Vallisneri, S. Vitale, M. Volonteri, H. Ward, and B. Wardell. eLISA: Astrophysics and cosmology in the millihertz regime. *GW Notes*, Vol. 6, p. 4-110, 6:4-110, May 2013.
- [144] B. Sathyaprakash, M. Abernathy, F. Acernese, P. Ajith, B. Allen, P. Amaro-Seoane, N. Anders-

son, S. Aoudia, K. Arun, P. Astone, B. Krishnan, L. Barack, F. Barone, B. Barr, M. Barsuglia, M. Bassan, R. Bassiri, M. Beker, N. Beveridge, M. Bizouard, C. Bond, S. Bose, L. Bosi, S. Braccini, C. Bradaschia, M. Britzger, F. Brueckner, T. Bulik, H. J. Bulten, O. Burmeister, E. Calloini, P. Campsie, L. Carbone, G. Cella, E. Chalkley, E. Chassande-Mottin, S. Chelkowski, A. Chincarini, A. Di Cintio, J. Clark, E. Coccia, C. N. Colacino, J. Colas, A. Colla, A. Corsi, A. Cumming, L. Cunningham, E. Cuoco, S. Danilishin, K. Danzmann, E. Daw, R. De Salvo, W. Del Pozzo, T. Dent, R. De Rosa, L. Di Fiore, M. Di Paolo Emilio, A. Di Virgilio, A. Dietz, M. Doets, J. Dueck, M. Edwards, V. Fafone, S. Fairhurst, P. Falferi, M. Favata, V. Ferrari, F. Ferrini, F. Fidecaro, R. Flaminio, J. Franc, F. Frasconi, A. Freise, D. Friedrich, P. Fulda, J. Gair, M. Galimberti, G. Gemme, E. Genin, A. Gennai, A. Giazotto, K. Glampedakis, S. Gossan, R. Gouaty, C. Graef, W. Graham, M. Granata, H. Grote, G. Guidi, J. Hallam, G. Hammond, M. Hannam, J. Harms, K. Haughian, I. Hawke, D. Heinert, M. Hendry, I. Heng, E. Hennes, S. Hild, J. Hough, D. Huet, S. Husa, S. Huttner, B. Iyer, D. I. Jones, G. Jones, I. Kamaretsos, C. Kant Mishra, F. Kawazoe, F. Khalili, B. Kley, K. Kokeyama, K. Kokkotas, S. Kroker, R. Kumar, K. Kuroda, B. Lagrange, N. Lastzka, T. G. F. Li, M. Lorenzini, G. Losurdo, H. Lück, E. Majorana, V. Malvezzi, I. Mandel, V. Mandic, S. Marka, F. Marin, F. Marion,

J. Marque, I. Martin, D. McLeod, D. Mckechnan, M. Mehmet, C. Michel, Y. Minenkov, N. Morgado, A. Morgia, S. Mosca, L. Moscatelli, B. Mours, H. Müller-Ebhardt, P. Murray, L. Naticchioni, R. Nawrodt, J. Nelson, R. O' Shaughnessy, C. D. Ott, C. Palomba, A. Paoli, G. Parguez, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, M. Perciballi, F. Piergiovanni, L. Pinard, M. Pitkin, W. Plasting, M. Plissi, R. Poggiani, P. Popolizio, E. Porter, M. Prato, G. Prodi, M. Punturo, P. Puppo, D. Rabeling, I. Racz, P. Rapagnani, V. Re, J. Read, T. Regimbau, H. Rehbein, S. Reid, F. Ricci, F. Richard, C. Robinson, A. Rocchi, R. Romano, S. Rowan, A. Rüdiger, A. Sambrowski, L. Santamaría, B. Sassolas, R. Schilling, P. Schmidt, R. Schnabel, B. Schutz, C. Schwarz, J. Scott, P. Seidel, A. M. Sintes, K. Somiya, C. F. Sopuerta, B. Sorazu, F. Speirits, L. Storch, K. Strain, S. Strigin, P. Sutton, S. Tarabrin, B. Taylor, A. Thürin, K. Tokmakov, M. Tonelli, H. Tournefier, R. Vaccarone, H. Vahlbruch, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, S. van der Putten, M. van Veggel, A. Vecchio, J. Veitch, F. Vetrano, A. Vicere, S. Vyatchanin, P. Wessels, B. Willke, W. Winkler, G. Woan, A. Woodcraft, and K. Yamamoto. Scientific objectives of Einstein Telescope. *Classical and Quantum Gravity*, 29(12):124013, June 2012.

- [145] P. Amaro-Seoane. Detecting intermediate-mass ratio inspirals from the ground and space. *Phys.Rev.D.*, 98(6):063018, September 2018.