MATEMÁTICAS I

ELECTRÓNICOS

Práctica 1:
NÚMEROS COMPLEJOS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIERÍA DEL DISEÑO
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

1. Introducción. Algo de historia

Los números que hoy llamamos "*complejos*" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) relacionados con el cálculo de las raíces de una ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que "*ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación*" y acuñó el calificativo de "*imaginarias*" para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución de un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibniz "*el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser.*"

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que no se preocuparon de la "*naturaleza*" de los mismos; no se preguntaron "*¿qué es un número complejo?*", sino que se dijeron "*a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos*". Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las Matemáticas al probar en 1799 el resultado conocido como **Teorema Fundamental del Álgebra** que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que también son números complejos. Merece la pena que entiendas bien lo que afirma este resultado. Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$x+4=0, \quad 3x-5=0, \quad x^2-5=0, \quad x^2+2x+2=0$$

cuyas soluciones

$$x=-4, \quad x=\frac{5}{3}, \quad x=\pm\sqrt{5}, \quad x=-1\pm i$$

tienen sentido cuando x es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5+(1+i)x^4+i\,x^3-(\frac{1}{3}-\sqrt{2}i)x^2-\sqrt{5}\,x+3-\frac{2i}{\sqrt{3}}=0$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El Teorema Fundamental del Álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que también son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números. El término, hoy usado de "*números complejos*" se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra "i" que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

Los números complejos son una herramienta básica de cálculo. Son especialmente útiles para trabajar con funciones sinusoidales, y por eso se hace uso constante de ellos siempre que representamos una señal por medio de dichas funciones, y no hay que olvidar que ése es el propósito básico de los "*métodos de Fourier*". La Transformada de Fourier Discreta, una herramienta fundamental en el tratamiento digital de señales, toma valores complejos. Las transformadas de Fourier y de Laplace son funciones complejas. La transformada Z, al igual que otras transformadas de uso frecuente, se define como una serie de números complejos. La función exponencial compleja desempeña un papel fundamental en el estudio de los sistemas LTI (sistemas lineales invariantes en el tiempo) y también en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales.

2. Unidad imaginaria. Operaciones con números complejos

Lo primero que hay que tener en cuenta a la hora de trabajar con números complejos en el *Mathematica* es que la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ se escribe `I`. Aunque también podemos utilizar un símbolo parecido a i mediante la combinación de teclas "*Esc i i Esc*", o desde el menú *Palettes - Basic Math Assistant*. Una vez aclarado esto, las operaciones usuales entre números complejos se realizan de la misma forma que con los números reales.

Ejemplo 1 *Sean los números complejos* $z_1 = 3 - 2i$ *y* $z_2 = -5 + 3i$, *calcula*

$$z_1 + z_2, \quad z_1\, z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1^3.$$

Solución:

```
In[]:= z1=3-2I;z2=-5+3I;
In[]:= {z1+z2,z1*z2,z1/z2,z1^3}
Out[]= {-2+I,-9+19I,-(21/34)+I/34,-9-46I}
```

Ejemplo 2 *Comprueba que*

(a) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}\, i) = -2i$ (b) $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5i} = -\dfrac{2}{5}$

(c) $\dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \dfrac{1}{2}\, i$ (d) $(1-i)^4 = -4$

(e) $\dfrac{\overline{(2+i)^2}}{(3-4i)} = 1$ (f) $\dfrac{3i^{30} - i^{19}}{2i-1} = 1 + i.$

Solución: *Escribiendo las siguientes instrucciones, el Mathematica devolverá las soluciones dadas*

```
In[]:= (Sqrt[2]-I)-I(1-Sqrt[2]I)//Simplify
In[]:= (1+2I)/(3-4I)+(2-I)/(5I)
In[]:= 5/((1-I)(2-I)(3-I))
In[]:= (1-I)^4
In[]:= Conjugate[(2+I)^2]/(3-4I)
In[]:= (3I^30-I^19)/(2I-1)
```

A veces ocurre que la operación solicitada no se realiza y se deja indicada (incluso utilizando `Simplify`). Para evitarlo y "*forzar*" al *Mathematica* que realice la operación y dé el resultado en forma binómica, podemos utilizar el comando `ComplexExpand[ ]`.

Ejemplo 3 *Calcula las siguientes potencias*

(a) $(2 - \sqrt{2}\, i)^4$ (b) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)^9$ (c) $(-1 + i)^7$.

Solución:

```
In[]:= (2-Sqrt[2]I)^4//ComplexExpand
Out[]= -28-16ISqrt[2]
```

O bien, directamente

```
In[]:= ComplexExpand[(1/2+Sqrt[3]I/2)^9]
Out[]= -1
In[]:= ComplexExpand[(-1+I)^7]
Out[]= -8-8I
```

3. Comandos básicos para los números complejos

En relación con los números complejos son interesantes los siguientes comandos:

`Re[z]` Devuelve la parte real del número complejo `z`.

`Im[z]` Devuelve la parte imaginaria del número complejo `z`.

`Abs[z]` Devuelve el módulo del número complejo `z`.

`Arg[z]` Devuelve el argumento principal en $[-\pi, \pi]$ del número complejo `z`.

`Conjugate[z]` Devuelve el conjugado del número complejo `z`.

Ejemplo 4 *Dado el número complejo* $z = -2 + 2i$*, se pide calcular su parte real, parte imaginaria, su módulo y argumento, y su conjugado.*

Solución: *Para ello, podemos escribir*

```
In[]:= Clear[z1];z1=-2+2I;
In[]:= {Re[z1],Im[z1],Abs[z1],Arg[z1],Conjugate[z1]}
Out[]= {-2,2,2Sqrt[2],3Pi/4,-2-2I}
```

Ejemplo 5 *Calcula el módulo y el argumento de los siguientes números complejos*

(a) $\sqrt{2i}$ (b) $\sqrt[3]{-i}$ (c) $\dfrac{i}{-2-2i}$

(d) $(\sqrt{3}-i)^6$ (e) $(1+i)^{11}$ (f) $\sqrt[3]{-8i}$.

Solución: *Para ello, podemos escribir*

```
In[]:= {z1=Sqrt[2I],z2=(-I)^(1/3),z3=I/(-2-2I),z4=(Sqrt[3]-I)^6,
       z5=(1+I)^11,z6=(-8I)^(1/3)}
Out[]= {1+I,-(-1)^(5/6),-(1/4)-I/4,(-I+Sqrt[3])^6,-32+32I,-2(-1)^(5/6)}
```

Puede observarse como algunos números complejos no aparecen en su forma binómica usual, incluso aparecen en forma de potencia de la base (-1)*, formato que utiliza el Mathematica, pero no "nosotros". Para verlos en forma binómica, podemos escribir*

```
In[]:= {z2,z4,z6}//ComplexExpand
Out[]= {-(I/2)+Sqrt[3]/2,-64,-I+Sqrt[3]}
```

Y una vez definidos los números complejos y "simplificados", podemos calcular sus módulos y argumentos con la orden `{Abs[zi],Arg{zi]}` *variando la* i *desde* 1 *hasta* 6.

```
In[]:= {Abs[z6],Arg[z6]}
Out[]= {2,-Pi/6)}
```

Nota: Hay que observar que cuando se calcule una raíz de índice cualquiera de un número complejo mediante la potenciación ($\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$), *Mathematica* solamente calcula una de sus n soluciones (la del argumento principal). Por ejemplo, $\sqrt[3]{-8i} = 2i$ (es fácil observar como $(2i)^3 = -8i$). Pero *Mathematica* nos da otra solución distinta (de las tres que hay), $\sqrt{3} - i$. Para tenerlo más claro, vamos a explicar como obtener **todas** las raíces de un número complejo en la siguiente sección.

4. Raíces de un número complejo. Resolución de ecuaciones

Nuestro objetivo ahora es obtener la raíz n-ésima $\sqrt[n]{w}$, de un número complejo cualquiera (incluido los números reales) w. Lo primero que hay que observar es que plantear dicha cuestión es lo mismo que resolver la siguiente ecuación $z^n = w$, (hallar todos los números complejos z tales que al ser elevados al número natural n obtenemos w). Dicho ésto y gracias al Teorema Fundamental del Álgebra, esta ecuación tiene n soluciones, es decir, a la hora de calcular la raíz n-ésima de un número complejo, lo primero que tenemos que saber es que vamos a obtener n soluciones.

Por ejemplo, bajo el manto de los números reales $\sqrt[3]{1} = 1$, y no hay ninguna otra posibilidad. Con los números complejos, debemos de dar tres soluciones.

Ejemplo 6 *Calcula* $\sqrt[3]{1}$.

Solución: *Para ello, una primera opción es plantear la ecuación algebraica y resolverla*

```
In[]:= Clear[z]
In[]:= Solve[z^3==1,z]
Out[]= {{z->1},{z->-(-1)^(1/3)},{z->(-1)^(2/3)}}
```

Y para observar las soluciones en forma binómica podemos escribir

```
In[]:= ComplexExpand[%]
Out[]= {{z->1},{z->-(1/2)-(ISqrt[3])/2},{z->-(1/2)+(ISqrt[3])/2}}
```

Es decir $\sqrt[3]{1}$ *tiene tres soluciones*: $z_1 = 1, z_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ *y* $z_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$.

También se pueden obtener las tres raíces escribiendo `ComplexExpand[Solve[z^3==1,z]]`

Por supuesto que la orden `Solve[ ]` (o similares) puede usarse para resolver otro tipo de ecuaciones con números reales y complejos.

Ejemplo 7 *Resuelve la siguiente ecuación* $z^2 + (1+i)z + 5i = 0$.

Solución: *Dicha ecuación se puede resolver escribiendo*

```
In[]:= Clear[z]
In[]:= Solve[z^2+(1+I)z+5I==0,z]
Out[]= {{z->-2+I},{z->1-2I}}
```

Observa que las 2 soluciones obtenidas son números complejos pero no son complejos conjugados. Eso es porque la ecuación dada tiene coeficientes complejos. Si tuviese coeficientes reales (¡*las de toda la vida*!) cuando aparecen soluciones complejas, aparecen a pares y conjugadas.

Ejemplo 8 *Resuelve las siguientes ecuaciones*

(a) $z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 26 = 0$. (b) $z^4 + (5+4i)z^2 + 10i = 0$.

Solución: *Las dos ecuaciones se pueden resolver con* `Solve[ ]`

```
In[]:= Clear[z]
In[]:= Solve[z^4+2z^3+7z^2-18z+26==0,z]
Out[]= {{z->-2-3I},{z->-2+3I},{z->1-I},{z->1+I}}
In[]:= Solve[z^4+(5+4I)z^2+10I==0,z]
Out[]= {{z->-Sqrt[-4-2I]},{z->Sqrt[-4-2I]},
        {z->-Sqrt[-1-2I]},{z->Sqrt[-1-2I]}}
```

4.1. Cálculo de raíces mediante la fórmula de De Moivre

También podemos obtener las raíces n-ésimas de un número complejo w si expresamos dicho número complejo en forma trigonométrica

$$w = |w|\,(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) \quad \text{siendo } \varphi = \arg(w),$$

y utilizamos la fórmula de De Moivre. Entonces de la ecuación $z^n = w$, cuyas n soluciones son $z = \sqrt[n]{w}$, pueden calcularse mediante la expresión:

$$z = \sqrt[n]{w} = |w|^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\,k\,\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi + 2\,k\,\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ejemplo 9 *Calcula, utilizando la fórmula de De Moivre, las cuatro raíces cuartas de* $w = -\,64$. *Es decir, calcula* $\sqrt[4]{-\,64}$.

Solución: *Lo primero, expresamos el número complejo en forma polar o trigonométrica*

$$w = -\,64 = 64_{\pi} = 64(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi).$$

Y después obtenemos las cuatro soluciones pedidas. Entre varias posibilidades, veamos una utilizando el comando `Table[ ]`

```
In[]:= {Abs[-64],Arg[-64]}
Out[]= {64,Pi}
In[]:= w=-64;n=4;
       Table[Abs[w]^(1/n)(Cos[(Arg[w]+2k*Pi)/n]+I*Sin[(Arg[w]+2k*Pi)/n]),{k,0,n-1}]
Out[]= {2+2I,-2+2I,-2-2I,2-2I}
```

5. Ejercicios propuestos

1. Obtén de forma exacta, la parte real, la parte imaginaria y el argumento del número complejo:
$$\frac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(3-4i)}$$

2. Si $z = 1 + \sqrt{3}\, i$ calcula el valor de $z^9 + \overline{z}^{\,9}$ y expresa el resultado en forma binómica.

3. Encuentra los números complejos $z \in \mathbb{C}$ tales que:

   (a) $z^2 = \left(\sqrt{3} - i\right)^3$

   (b) $z^3 = -1 + i$

   (c) $z^5 = 16 - 16\sqrt{3}\, i$

4. Encuentra la solución de $z^2 - (4-i)z + (5-5i) = 0$ y expresa el resultado en forma binómica.

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   (a) $(z^4 - 16)(z^3 + 1) = 0.$ (b) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0.$

   (c) $z^4 + 6z^2 + 9 = 0.$ (d) $z^6 + 4z^3 + 4 = 0.$

6. Sea el número complejo $z = \left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^4$. Se pide:

   (a) Obtén su expresión en forma binómica.

   (b) Calcula su módulo y argumento.

   (c) Halla en forma binómica y con los datos del apartado anterior $\sqrt{z}$. Es decir, las dos raíces cuadradas de dicho número z.

   (d) Calcula el valor de $\dfrac{z^5 + \overline{z}^{\,5}}{2i}$ y expresa el resultado en forma binómica.