Notas sobre integración

Pau Amaro Seoane

https://astro-gr.org
amaro@riseup.net

La integración es un concepto fundamental de las matemáticas que consiste en hallar, en general, el área delimitada por una curva con un eje. Es un método para hallar el valor neto o total de una cantidad que varía continuamente. El concepto de integración es el inverso de la diferenciación, que es el proceso de encontrar la tasa de cambio de una función. Sin embargo, el concepto base de la integración no es sencillo. Hablar de "velocidad instantánea" no tiene sentido, porque necesitamos dos puntos temporales para definir esa velocidad. En estas notas veremos cómo podemos intentar comprender esos conceptos, cómo relacionarlos con los de límite, superficie, gradiente y series, así como aprender a resolver varios tipos de integrales. Incluímos aquí integrales que no se pueden resolver con programas de ordenador algebraicos.

1. Introducción

El cálculo diferencial es una rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las tasas de cambio y de las pendientes de las curvas. Fue desarrollado en el siglo XVII por matemáticos como Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, quienes lo utilizaron para estudiar problemas en áreas como la física y la ingeniería. En su forma básica, el cálculo diferencial implica encontrar la derivada de una función, que representa la tasa de cambio de la función en un punto dado. Esto se puede hacer mediante el uso de diferentes técnicas, como la regla de la cadena y el cálculo de límites. El cálculo diferencial es una herramienta importante en muchas áreas de las ciencias, incluyendo la física, la economía y la biología.

Un límite matemático es un concepto que se utiliza en el cálculo para medir cómo una función se comporta a medida que se acerca a un punto determinado. En otras palabras, un límite nos dice qué valor la función tiende a tomar a medida que se aproxima a un cierto punto, aunque es posible que no alcance nunca exactamente ese valor. Los límites son importantes porque nos permiten analizar el comportamiento de una función en puntos en los que no es fácil calcular su valor de manera directa, como en puntos de discontinuidad o en puntos en los que la función se vuelve infinita. Los límites también son esenciales en el cálculo de áreas, longitudes de curvas y otras cantidades físicas que se pueden expresar en términos de funciones matemáticas.

Por ejemplo, hay una cantidad infinita de números irracionales entre el uno y el dos. Un número irracional es aquel que no se puede expresar como la fracción de dos números enteros. Algunos ejemplos de números irracionales son la raíz cuadrada de 2, pi y la constante e. Como hay una cantidad infinita de números racionales entre el uno y el dos, es lógico suponer que también hay una cantidad infinita de números irracionales en ese intervalo. Cualquier número que se pueda formar como una cantidad finita o infinita de decimales que no se pueda simplificar como una fracción será irracional.

Una superficie es un lugar geométrico en el espacio de dos dimensiones. En otras palabras, es un conjunto de puntos en el espacio que están unidos de alguna manera. Las superficies pueden ser de muchos tipos diferentes, desde planas como una hoja de papel hasta curvas como una esfera. En matemáticas, se estudian las propiedades y características de las superficies, como su forma, área y longitud de su curva. Las superficies también juegan un papel importante en la geometría diferencial, donde se utilizan para modelar y analizar formas en el espacio.

No es posible determinar cuántos puntos hay en un plano sin tener más información. Un plano es una superficie infinita que se extiende en dos dimensiones, pero no tiene un tamaño finito ni un número finito de puntos. Por lo tanto, no es posible contar cuántos puntos hay en un plano. En teoría, un plano podría contener una cantidad infinita de puntos, dependiendo de cómo se defina el plano y cómo se coloquen los puntos en él. Sin embargo, en la práctica, solo se pueden contar un número finito de puntos en un plano, ya que el número de puntos que podemos colocar en un plano es limitado por nuestra capacidad de medir y contar.

1. Derivadas y cambios “instantáneos”

El concepto de tangente está estrechamente relacionado con el de derivada en matemáticas. La tangente de un punto en una curva es la línea que toca la curva en ese

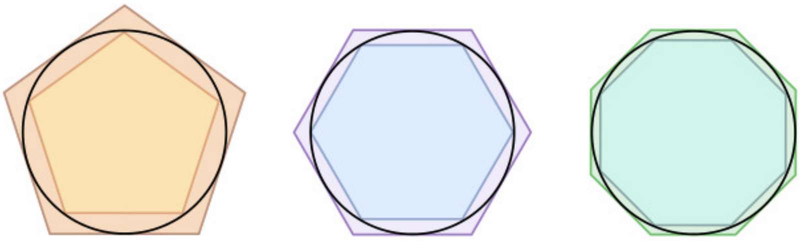

Figura 1: Método de agotamiento para aproximar el valor de π.

punto y tiene la misma pendiente que la curva en ese punto. La derivada de una función en un punto determinado es el valor de la pendiente de la línea tangente a la función en ese punto. Por lo tanto, la derivada de una función en un punto dado es igual a la tangente de la función en ese punto. La derivada se puede interpretar como la tasa de cambio "instantánea" de una función en un punto dado, mientras que la tangente se puede interpretar como la línea que mejor se aproxima a la función en ese punto

En matemáticas, un cambio instantáneo se refiere a la tasa de cambio de una función en un punto determinado. Esto no se refiere a un cambio que ocurre en un instante en el tiempo, sino que se utiliza como una manera de medir la tasa de cambio en un punto dado. Un cambio instantáneo se puede calcular utilizando la derivada de una función en un punto determinado. La derivada de una función en un punto dado es el límite de la tasa de cambio promedio de la función en un intervalo cada vez más pequeño que contenga al punto en cuestión. Aunque el término "cambio instantáneo" puede parecer y es contradictorio, en matemáticas se usa como una manera de medir la tasa de cambio en un punto dado sin tener en cuenta el tiempo.

2. El método de agotamiento

El método de agotamiento (methodus exhaustionibus) es la forma de hallar el área de una forma inscribiendo en su interior o exterior una secuencia de polígonos cuyas áreas convergen al área de la forma contenedora, como podemos ver en la figura 1. Si la sucesión se construye correctamente, la diferencia de área entre el enésimo polígono y la forma contenedora será arbitrariamente pequeña cuando n va aumentando.

A medida que esta diferencia se hace arbitrariamente pequeña, los valores posibles para el área de la forma se agotan sistemáticamente por las áreas de límite inferior que se han establecido de forma sucesiva por los términos de la secuencia.

El método de agotamiento suele requerir una forma de prueba por contradicción, conocida como reductio ad absurdum. Consiste en hallar el área de una región comparándola primero con el área de una segunda región, que puede "agotarse" de modo que su área se aproxime arbitrariamente al área verdadera. La prueba consiste en suponer que el área verdadera es mayor que la segunda área, demostrar que esa afirmación es falsa, suponer que es menor que la segunda área y demostrar que esa afirmación también es falsa.

El método de agotamiento se considera precursor de los métodos de cálculo. El desarrollo de la geometría analítica y del cálculo integral riguroso en los siglos XVII-XIX superó con mucho el método de agotamiento, de modo que ya no se utiliza para resolver problemas.

1. Usar la cabeza

Utilizar la lógica y el razonamiento en lugar de seguir ciegamente fórmulas y reglas matemáticas estrictas o usar un ordenador es lo que hace que avancemos.

Por ejemplo, supongamos que tenemos un cubo de 2 metros de lado. ¿Cuál es el área total de una de sus caras? En lugar de intentar recordar la fórmula para calcular el área de un cubo, podemos resolver este problema de manera lógica. Sabemos que el área de un cuadrado es igual a la longitud de uno de sus lados elevado al cuadrado. Como el cubo tiene 2 metros de lado, su área será igual a 2 metros al cuadrado, $2^2 = 4$ metros cuadrados.

Si tenemos un cilindro de 2 metros de altura y 3 metros de diámetro. ¿Cuál es su área total? En lugar de intentar recordar la fórmula para calcular el área de un cilindro, podemos *pensar*. Sabemos que el área de un círculo es igual a pi veces el radio al cuadrado. Como el diámetro del cilindro es igual a 3 metros, su radio es igual a la mitad de esa cantidad, es decir, 1,5 metros. Por lo tanto, su área será igual a pi veces 1,5 metros al cuadrado, o $3,14 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = 7,068\ m^2$.

Por esto soy partidario de que se intenten resolver los problemas, los ejercicios, con papel y lápiz.

No pensar a la hora de estudiar matemáticas no es bueno porque las matemáticas requieren razonamiento lógico y una comprensión profunda de los conceptos y reglas. Si no se piensa al estudiar matemáticas, es probable que no se comprendan bien los conceptos y que se cometan errores. Además, no pensar al estudiar matemáticas puede dificultar el aprendizaje y hacer que el estudio sea menos eficiente y productivo. Por lo tanto, es importante prestar atención y utilizar el razonamiento al estudiar matemáticas para comprender bien los conceptos y aplicarlos de manera correcta. Asimismo, tener una formación humanística a la hora de estudiar matemáticas puede ser útil por varias razones. En primer lugar, la formación humanística puede ayudar a desarrollar habilidades como el razonamiento crítico y la capacidad de análisis, que son esenciales para entender y resolver problemas matemáticos. Además, la formación humanística puede proporcionar una perspectiva más amplia y profunda sobre el mundo y la realidad, lo que puede ayudar a ver las matemáticas desde diferentes puntos de vista y a encontrar nuevas aplicaciones y soluciones. Por último, la formación humanística puede ayudar a desarrollar habilidades sociales y comunicativas, que son importantes para colaborar con otros y para expresar y discutir ideas matemáticas de manera efectiva. En resumen, la formación humanística es un complemento valioso a la formación matemática y enriquece el estudio y la aplicación de las matemáticas.

Aprender a hacer integrales sin ordenadores puede ser útil por varias razones. En primer lugar, el cálculo a mano puede ayudar a desarrollar habilidades matemáticas fundamentales, como el razonamiento lógico y la resolución de problemas. También puede ayudar a mejorar la comprensión y el conocimiento de las matemáticas en general, ya que hacer cálculos a mano requiere una mayor atención al detalle y una comprensión más profunda de las reglas y conceptos matemáticos.

De hecho, hay muchos ejemplos de integrales que no se pueden resolver fácilmente con ordenadores. Uno de los ejemplos más conocidos es la integral de Riemann, que se utiliza para calcular el área bajo una curva en un gráfico. Esta integral es difícil de resolver con un ordenador debido a que implica sumar una serie infinita de números muy pequeños. Otro ejemplo es la integral de Lebesgue, que se utiliza para medir el tamaño de conjuntos en geometría. Esta integral también es difícil de resolver con un ordenador debido a su complejidad matemática. Además, hay muchas integrales que no tienen una solución exacta y que se pueden resolver solo aproximadamente con un ordenador. En estos casos, el cálculo a mano puede ser una herramienta útil para obtener soluciones más precisas.

Para poner un ejemplo, le sugiero al lector que intente resolver esta integral con cualquier programa de ordenador que conozca:

$$\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2\right) dx \text{ para } |\alpha| \geq 1 \tag{1}$$

Con el teorema de Leibniz la integral se resuelve en muy poco tiempo con lápiz y papel. El resultado es $2\pi \ln(|\alpha|)$. Dejo al lector que se divierta viendo el resultado que ofrecen los programas de ordenador.

3. Integración directa: Reglas básicas

1. Si $F'(x) = -f(x)$, entonces $\int f(x)dx = F'(x) + C$, donde C es una constante arbitraria.
2. $\int Af(x)dx = A \int f(x)dx$, donde A es una cantidad constante.
3. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.
4. Si $\int f(x)dx = F(x) + C$ y $u = \phi(x)$, entonces $\int f(u)du = F(u) + C$.

En particular, $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$ $(a \neq 0)$.

1. Tabla de integrales

1. $\int i^n dx - \frac{x^{n+1}}{n-1}, C, \quad n \neq -1.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{\mathfrak{x}}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$
4. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0).$
5. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0).$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a}\right| + C \quad (a \neq 0).$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0); \int e^x dx = e^x + C.$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
10. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$.
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$.
13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$.
14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\tan x + \sec x| + C$.
15. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$.
16. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$.
17. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$.
18. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$.

Ejemplo 1.1

$$\begin{aligned} \int \left(ax^2 + bx + c\right) dx &= \int ax^2 dx + \int bxdx + \int cdx = \\ &= a \int x^2 dx + b \int xdx - c \int dx = \\ &= -a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + C. \end{aligned} \tag{2}$$

Aplicando las reglas básicas y las fórmulas de integración, encuentre las siguientes integrales:

1. $\int 5\, d^2 x^6 dx$.
2. $\int \left(6x^2 + 8x + 3\right) dx$.
3. $\int x(x+a)(x+b)dx$.
4. $\int \left(a + bx^3\right)^2 dx$.
5. $\int \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2\right)}{x^{2/3}} dx$.
6. $\int \sqrt{2px}\, dx$.
7. $\int \frac{(x^n - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$.
9. $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}} dx$.
10. $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx$.
11. $\int \frac{dx}{x^2+7}$.
12. $\int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx$.
13. $\int \frac{dx}{x^2-10}$.
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.
15. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$.
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$.
17. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$.
18. $\int \tan^2 x dx$.
19. $\int \cot^2 x dx$.
20. $\int \tanh^2 x dx$.
21. $\int \coth^2 x dx$.
22. $\int 3^x e^x dx$.

4. Integración bajo el signo del diferencial

La regla 4 que hemos visto al principio amplía considerablemente la tabla de integrales estándar: en virtud de esta regla, la tabla de integrales se cumple independientemente de si la variable de integración es una variable independiente o una función diferenciable.

Ejemplo 1.2

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} &= \frac{1}{5}\int (5x-2)^{\frac{1}{2}} d(5x-2) = \\
&= \frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{5}\frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

donde hemos elegido la variable $u = 5x - 2$ y hemos usado la regla 4 y la integral tabular 1.

Ejemplo 1.3

$$
\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^3}\right) + C.
$$

En este caso hemos usado $u = x^2$, la regla 4 y la integral tabular 5.

Ejemplo 1.4

$$
\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} d\left(x^3\right) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C,
$$

en virtud de la Regla 4 y la integral tabular 7.

En los tres últimos ejemplos hemos reducimos la integral dada a la siguiente forma antes de hacer uso de una integral tabular:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du, \text{ con } u = \varphi(x).$$

Este tipo de transformación se suele denominar "integración bajo el signo diferencial". Algunas transformaciones comunes de diferenciales, que se usaron en los ejemplos 2 y 3 son:

(a) $dx = \frac{1}{a}d(ax+b) \quad (a \neq 0)$
(b) $xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right)$, y así sucesivamente.

Usando las reglas y fórmulas básicas de integración, encuentre las siguientes integrales:

1. $\int \frac{adx}{a-x}$.
2. $\int \frac{ax+b}{\alpha x+\beta}dx$.
3. $\int \frac{2x+3}{2x-1}dx$.
4. $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$.
5. $\int \frac{1-3x}{3+2x}dx$.
6. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$.
7. $\int \frac{xdx}{a+bx}$.
8. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}dx$.
9. $\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2 dx$.
10. $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx$.
11. $\int \frac{bdy}{\sqrt{1-y}}$.
12. $\int \sqrt{a-bx}dx$.
13. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.
14. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$.
15. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$.
16. $\int \frac{dx}{7x^2-8}$.
17. $\int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2}$ $(0 < b < a)$.
18. $\int \frac{x^2}{x^2+2}dx$.
19. $\int \frac{x^3}{a^2-x^2}dx$.
20. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx$.
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$.
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$.
23. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}dx$.
24. $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx$.
25. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx$.
26. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx$.
27. $\int \frac{xdx}{x^2-5}$. 1078. $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$.
28. $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx$.
29. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$.
30. $\int \frac{x^2}{1+x^9}dx$.
31. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$.
32. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$.
33. $\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$.
34. $\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx$.
35. $\int \sqrt{\frac{dx}{(1+x^2)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}$.
36. $\int ae^{-mx}dx$.
37. $\int 4^{2-sx}dx$.
38. $\int \left(e^t-e^{-t}\right)dt$.
39. $\int \left(e^{-\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx$.
40. $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx$.
41. $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}dx$.
42. $\int e^{-\left(x^2+1\right)}xdx$.
43. $\int x\cdot 7^{x^2}dx$.
44. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.
45. $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.
46. $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$.
47. $\int e^x\sqrt{a-be^x}dx$.
48. $\int \left(e^{\frac{x}{a}}+1\right)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{x}{a}}dx$.
49. $\int \frac{dx}{2^x+3}$.

50. $\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}}$.
51. $\int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-tb\cdot x}} dx$.
52. $\int \frac{e^t dt}{\sqrt{1-e^t}}$.
53. $\int \sin(a+bx)dx$.
54. $\int \cos \frac{x}{\sqrt{2}} dx$.
55. $\int (\cos ax + \sin ax)^2 dx$.
56. $\int \cos Vx \frac{dx}{Vx}$.
57. $\int \sin(\lg x) \cdot \frac{dx}{x}$.
58. $\int \sin^2 x dx$.
59. $\int \cos^2 x dx$
60. $\int \sec^2(ax+b)dx$.
61. $\int \cot^2 ax dx$.
62. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{a}}$.
63. $\int \frac{dx}{3\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}$.
64. $\int \frac{dx}{\sin(ax+b)}$.
65. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$.
66. $\int x \sin\left(1-x^2\right) dx$.
67. $\int \left(\frac{1}{\sin x\sqrt{2}} - 1\right)^2 dx$.
68. $\int \tan x dx$.
69. $\int \cot x dx$.
70. $\int \cot \frac{x}{a-b} dx$.
71. $\int \frac{dx}{\tan \frac{x}{5}}$.
72. $\int \tan \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
73. $\int x \cot\left(x^2+1\right) dx$.
74. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.
75. $\int \cos \frac{x}{a} \sin \frac{x}{a} dx$.
76. $\int \sin^3 6x \cos 6x dx$.
77. $\int \frac{\cos ax}{\sin^8 ax} dx$.
78. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x} dx$.
79. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx$.
80. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x} \sin 2x dx$.
81. $\int \tan^3 \frac{x}{3} \sec^2 \frac{x}{3} dx$.
82. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx$.
83. $\int \frac{\cot^{\frac{2}{3}} x}{\sin^2 x} dx$.
84. $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$.
85. $\int \frac{(\cos ax + \sin ax)^2}{\sin ax} dx$.
86. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x}{b - a\cot 3x} dx$.
87. $\int (2\sinh 5x - 3\cosh 5x) dx$.
88. $\int \sinh^2 x dx$.
89. $\int \frac{dx}{\sinh x}$.
90. $\int \frac{dx}{\cosh x}$.
91. $\int \frac{dx}{\sinh x \cosh x}$.
92. $\int x \sqrt[5]{5-x^2} dx$.
93. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1} dx$.
94. $\int \frac{x^3}{x^3+5} dx$.
95. $\int x e^{-x^2} dx$.
96. $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2} dx$.
97. $\int \frac{x^3-1}{x1} dx$.
98. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$.
99. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx$.
100. $\int \frac{\tan 3x - \cot 3x}{\sin 3x} dx$.
101. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.
102. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 2}} dx$.
103. $\int \left(2 + \frac{x}{2x^2+1}\right) \frac{dx}{2x^2+1}$.
104. $\int a^{\sin x} \cos x dx$.
105. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx$.
106. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.
107. $\int \tan^2 ax dx$.
108. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.
109. $\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{4-\tan^2 x}}$.
110. $\int \tanh x dx$.
111. $\int \coth x dx$.
112. $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}}$.
113. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$.
114. $\int \tan \sqrt{x-1} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.
115. $\int \frac{xdx}{\sin x^2}$.
116. $\int \frac{e^{\arctan x} - x\ln\left(1+x^2\right)+1}{1+\lambda^2} dx$.
117. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$.
118. $\int \frac{\left(1-\sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sin \frac{x}{\sqrt{2}}} dx$.
119. $\int \frac{x^2}{x^2-2} dx$.
120. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$.
121. $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$.
122. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$.
123. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

124. $\int \frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2}$ $(0 < b < a)$
125. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}} dx.$
126. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax}.$
127. $\int \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right) dt.$
128. $\int \frac{dx}{x\left(4-\ln^2 x\right)}.$
129. $\int \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}} dx.$
130. $\int e^{-\tan x} \sec^2 x dx.$
131. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}} dx.$
132. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$
133. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
134. $\int \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{\sec^2 x+1}} dx.$
135. $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x} dx.$
136. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$
137. $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}} dx.$
138. $\int x^2 \cos\left(x^3+3\right) dx.$
139. $\int \frac{3^{\tanh x}}{\cosh^2 x} dx.$

5. Integración por sustitución

1. Cambio de variable en una integral indefinida

Poniendo $x = \psi(t)$, con t una nueva variable y φ una función continuamente diferenciable, (porque, si no, no podemos hacer el cambio), tendremos:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(\mathrm{t})]\varphi'(t)dt.$$

La única cosa que hay que tener en cuenta es que hay que buscar una función φ de tal manera que demos con una integral más sencilla de resolver que la inicial.

Ejemplo 2.1

$$\int x\sqrt{x-1}dx$$

En este caso, hacemos $t = \sqrt{x-1}$, por lo que $x = t^2+1$ y $dx = 2tdt$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}dx &= \int \left(t^2+1\right) t \cdot 2tdt = 2\int \left(t^2+t^2\right) dt = \\ &= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned} \tag{4}$$

A veces usamos sustituciones de la forma $u = \varphi(x)$. Supongamos que logramos transformar el integrando $f(x)dx$ siguiendo esa sustitución. Es decir,

$$f(x)dx = g(u)du, \text{ con } u = \varphi(x).$$

Si encontramos $\int g(u)du$, o sea $\int g(u)du = F(u) + Q$, entonces

$$\int f(x)dx = F[\varphi(x)] + C.$$

En realidad, aunque el lector no se haya dado cuenta, ya hemos usado este método. Los ejemplos 1.2, 1.3 y 1.4 se pueden resolver de la siguiente manera:

Ejemplo 2.2

$u = 5x - 2; \quad du = 5dx; \quad dx = \frac{1}{5}du.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C.$$

Ejemplo 2.3

$u = x^2; du = 2xdx; xdx = \frac{du}{2}.$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C.$$

Ejemplo 2.4

$u = x^s; \quad du = 3x^2dx; x^2dx = \frac{du}{3}.$

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

2. Sustituciones trigonométricas.

1. Si una integral contiene el radical $\sqrt{a^2 - x^2}$, lo habitual es poner $x = a\sin t$; así que

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t.$$

2. Si una integral contiene el radical $\sqrt{x^2 - a^2}$, ponemos $x = a\sec t$,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t.$$

3. Si una integral contiene el radical $\sqrt{x^2 + a^2}$, ponemos $x = a\tan t$,

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a\sec t.$$

Cabe señalar que las sustituciones trigonométricas no siempre resultan ventajosas. De hecho, a veces es más conveniente utilizar sustituciones hiperbólicas, que son similares a las sustituciones trigonométricas (vea el ejemplo 2).

Ejemplo 2.5

Encuentre

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx$$

Para resolver este problema, elegimos $x = \tan t$. Por lo tanto, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx = \int \frac{\sqrt{\tan^2 t+1}}{\tan^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\sec t \cos^2 t}{\sin^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t \cos t}$$
$$= \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t \cdot \cos t} dt = \int \frac{dt}{\cos t} + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \ln|\tan t + \sec t| - \frac{1}{\sin t} + C =$$
$$= \ln\left|\tan t + \sqrt{1+\tan^2 t}\right| - \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan t} + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

Aplicando las sustituciones indicadas, encuentre las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}, \quad x = \frac{1}{t}.$
2. $\int \frac{dx}{e^x+1}, \quad x = -\ln t.$
3. $\int x\left(5x^2-3\right)^7 dx, \quad 5x^2 - 3 = t.$
4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}, t = \sqrt{x+1}.$
5. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}, \quad t = \sin x.$

Buscando (y encontrando) sustituciones adecuadas, resuelva las siguientes integrales:

1. $\int x(2x+5)^{10} dx.$
2. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx.$
3. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}.$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$
6. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx.$
7. $\int \frac{\ln 2x dx}{\ln 4x x}.$
8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx.$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

Aplicando sustituciones trigonométricas, encuentre las siguientes integrales:

1. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
2. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx.$
3. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}.$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
5. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx.$
6. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}.$
7. $\int \sqrt{1-x^2} dx.$

Evalúe la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ mediante la sustitución $x = \sin^2 t$.

Evalúe la integral $\int \sqrt{a^2+x^2} dx$ aplicando la sustitución hiperbólica $x = a \sinh t$. Solución. Como: $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \sinh^2 t} = a \cosh t$ y $dx = a \cosh t dt$, por lo que

$$\int \sqrt{a^2+x^2} dx = \int a \cosh t \cdot a \cosh t dt = \tag{5}$$
$$= a^2 \int \cosh^2 t dt = a^2 \int \frac{\cosh 2t + 1}{2} dt = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\sinh 2t + t\right) + C = \tag{6}$$
$$= \frac{a^2}{2}(\sinh t \cosh t + t) + C. \tag{7}$$

Ya que $\sinh t = \frac{x}{a}$, $\cosh t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$ y $e^t = \cosh t + \sinh t = \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$ finalmente derivamos que

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C_1, \tag{8}$$

y hemos definido la nueva constante de integración que aborbe la previa, $C_1 = C - a^2 2/\ln a$. Quien se olvide de añadir la constante, acabará decapitado en clase.

Resuelva

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \tag{9}$$

usando $x = a\cosh t$.